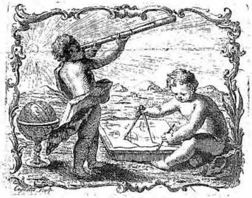
Eleon. Monti del. Dom. Cagnoni sc. Brix.ae

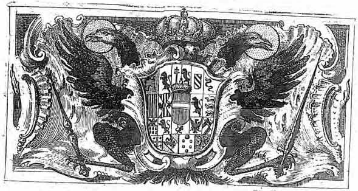
LECTIONES OPTICÆ RAMIRI RAMPINELLII BRIXIANI

CONGREGATIONIS MONTIS OLIVETI MONACHI

ET IN GYMNASIO TICINENSI MATHESEOS PROFESSORIS.



BRIXIÆ CIↃIↃCCLX.
Excudebat JOANNES BAPTISTA BOSSINI
SUPERIORUM PERMISSU.



EXCELLENTISSIMO

SENATUI

MEDIOLANENSI.

CÆSAREUS SOMMARIVA

F.

HAbetis jam, P. A., Lectiones Optices, quas Ramirus Rampinellius no∫ter erat nomini Ve∫tro in∫cripturus, ni∫i clari∫∫imus egregiu∫que vir vita, qua dignus erat immortali, nimis propere cedens, tri∫te nobis ∫ui reliqui∫∫et de∫iderium. Satis con∫cius erat ip∫e

∫ibi

ſibi de prolixiſſima voluntate in ſe Veſtra, deque magnitudine beneficiorum, quibus favendo ingeniis, uti ſoletis, ejus honori, commodo utilitatique conſuluiſtis; atque adeo ipſum Vobis mirifice carum & acceptum eſſe declaraviſtis. Contra vero nihil magis illi erat in votis, nihilque longius, quam ut & ipſe quoque, quo erat in Vos animo, & Vobis & omnibus proderet aliqua ratione: veritus, & quidem jure, ne turpe eſſet nullum ſtudii in Vos ſui, voluntatis, & grati animi publicum extare monumentum. Cumque jam ad inſtruendos informandoſque mathematicis diſciplinis adoleſcentes ſibi creditos, ſelectiora de tota re optica theoremata geometricis demonſtrationibus coercuiſſet illuſtraſſetque, exiſtimavit propterea ſibi pulcherrime conſtituturum hujus operis fructum, ſi, reluctante etiam illa naturali modeſtia, quæ non pauca ſane illius præſtantiſſimi ingenii nobis invidit teſtimonia, in lucem proferret, illudque quicquid eſſet Amplitudini Veſtræ nuncuparet. Quo quidem omnes intelligerent & ſe pro viribus eniſum eſſe, ut expectationi de ſe Veſtræ quodammodo reſponderet, & aliquam pro acceptis maximis beneficiis Veſtris gratiam referre voluiſſe. Porro quanta tum perfuſus eſſet voluptate, cum ægrotanti ſibi delatum fuit labores hoſce ſuos a Vobis humaniſſime acceptum iri, vel Ipſi facile exiſtimare poteſtis, qui hominis ingenium ſuapte natura gratum, & erga Vos obſequentiſſimum noſtis. Puto equidem tum temporis ex illo fauſtiſſimo nuncio non parum levaminis ad valetudinem ſuam acceſſiſſe. Sed praepropera ſtatim morte, ita Deo Optimo jubente, qui non paſſus eſt eum diutius coronam expectare, ex hominibus abreptus, nec ſuum Opus typis editum vidit, nec ipſi Vobis de manu exhibere, uti optaverat, licuit. Qua ex morte ſi omnes, qui ejus doctrinam noverant tanta cum modeſtia ac moderatione conjunctam, qui comitatem morumque ſuavitatem ſuſpiciebant, doloris plurimum auferunt, ego ſcilicet quam qui maxime. Ablatus enim mihi eſt unus, qui cum inſigniter me mutuo amabat, tum ſtudia mea adjuvabat fovebatque, nullum-

que

que officii genus , quod e re mea eſſe poſſet , prætermiſit unquam. Sed quid acceptum vulnus triſti hac recordatione perfricare inſiſto ? & quidem non ſine nota , nam , ut præclare Tullius de Q. Hortenſii morte : ſi id dolemus , quod eo jam frui nobis non licet , noſtrum eſt id malum, quod modice feramus , ne id non ad amicitiam , ſed ad domeſticam utilitatem referre videamur . Illud potius dicam , ex eo me non parum recreari , quod mihi potiſſimum accidit extremæ tanti Magiſtri mei voluntati tamquam e teſtamento reſpondere . Videor autem mihi ære alieno in hoc quaſi diſſolvi , totque beneficiorum reus , niſi ſortis , aliquam tamen fænoris partem tanto erogare creditori , ſi, quod maxime in ejus optatis erat , id perficiam, ut lucubrationes ejus lucem adſpiciant, ſeſeque recipiant in tutelam Veſtram. Obſequor in eo etiam Moderatoribus meis , præſertim vero Optimis Brixianis Præſulibus Flaminio Gandinio , & Ildefonſo Ugonio , quos honoris cauſſa nominatos volo : hi quippe literarum amantiſſimi , ſi ea quæ

ad

ad virum perfecte inſtituendum poſtulabantur , Rampinellio olim ſuppeditavere , modo vero , ut hujus promiſſa Vobis facta ſervarentur , conſilio , & ſumptibus hanc editionem curandam ſuſceperunt , mihique hoc muneris , quo nunc fungor imprimis mandarunt . Et fides tandem liberatur mea , a qua tam pretioſum depoſitum appellatur , reclamatur , flagitatur , ut jam periculum ſit ne cunctatione mea cogar ad exhibendum formulam accipere . Sed , quod caput eſt cum Graviſſimum iſtum Ampliſſimumque Cœtum Veſtrum uſque a puero tacitus colere ac venerari conſueverim , & deinceps uſque ad hoc temporis nihil deeſſe ſingulis neque magnitudine ingenii , neque religione , neque juſtitia , neque morum gravitate , neque tandem generis nobilitate perſpiciam , quominus Majeſtati Senatus Veſtri merito nomen Regium inditum ſit ; intimam ex eo percipio voluptatem , quod mihi tamdiu cupienti nunc aditus patefactus ſit tum ad ſignificandum meum erga Vos obſequium , tum etiam , niſi me ſpes maxime fallat , ad benevolentiam ve-

ſtram

ſtram conciliandam. Ultro fateor me Vobis tribuere quod Veſtrum jam eſt. Verumtamen ſi in cujus nomine id faciam animadvertere, meamque benemerendi de Vobis voluntatem exiſtimare velitis, non gravate officium meum Vos eſſe excepturum confido, neque parum, quæ Veſtra eſt humanitas, me Vobis eſſe commendatum.

FRAN-

FRANCISCI TURRICENI

AD CLARISSIMUM VIRUM

Et Præſtantiſſimum Congregationis Olivetanæ

PRÆSULEM

BERNARDUM

ONUPHRIUM

DE VITA

RAMIRI RAMPINELLII

EPISTOLA.

Forma mentis æterna quam tenere, & exprimere non per alienam materiam, aut artem, ſed tuis ipſe moribus poſſis.

Tacit. Agric.

VIRO CLARISSIMO

BERNARDO ONUPHRIO

FRANCISCUS TURRICENUS

S. P. D.

ETſi quod tibi, VIR CLARISSIME, elapſo abhinc anno promiſeram, id me fidenter nimis, ne dicam temere, & inconſulto promiſiſſe jam ſenſerim, ea tamen ſunt tua in me merita, is meus erga communem amicum amor, ut quidvis aliud mihi objici, aut a me exigi malim, quam ne officio deſim, & fidem meam liberem, atque abſolvam. Scilicet recenti adhuc dolore propter immaturam Clariſſimi ejuſdemque amiciſſimi viri Ramiri Rampinellii mortem ſtatim, ac ſine ulla hæſitatione promiſi me ejus Vitam ſcripturum. Ferme enim pares ætate, paribus ſtudiis, licet diſpari longe fructu, primam adoleſcentiam ſumma cum familiaritate tranſegimus, quam quidem amicitiam ille qua erat humanitate conſtanter retinuit, & ego ſtudioſiſſime colui. Sed cum manum ad ſcribendum admoverem re propius inſpecta ſubiit animum inter alias hæc dubitatio: quidnam ego in medium proferre auderem de eo viro cujus præcipua laus fuit, quod egregias animi, atque ingenii dotes apud exteros ſedulo obtegeret, inter conſcios diſſimularet plerumque, ſemper imminueret? Nempe quantus ille in Mathematicis diſciplinis fuerit, ſatis Lectiones in Ticinenſi Licœo habitæ, ſatis hoc ipſum quod nunc editur opus, ſatis elogia quibus ab Etruſcis, Romanis, Venetiſque ſcriptoribus ornatus eſt, & demum clariſſima illa ingenia quæ hiſce ſtudiis inſtituit, atque formavit, ſatis oſtendent. Mihi igitur leviora commemoranti

in

in tenui laborem fore, scriptori certe inglorium, nec legentibus fortassis gratum probe intelligebam, ac proinde manus ab incœpto veluti retrahi sentiebam. Sed cum Illustrium Virorum vel minima quæque seu dicta, seu facta a nonnullis nosci desiderentur, & a doctis etiam quandoque avide excipiantur, hinc officii mei rationem confidens posse aliquibus saltem probari, has partes mihi sumpsi ut illum tibi sistam non ea duntaxat facie, qua Geometram exhibet, sed qua etiam hominem, qua amicum, qua civem. Dum itaque hæc ego singillatim, & prolixius fortassis persequor, dumque hoc modo mihi videor desiderium tanti viri aliquantum levare, ne quis mihi hoc genus solatii invideat, aut culpet velim.

Natus est Ludovicus Rampinellius (Ramiri enim nomen adscivit tum solum cum in Clarissimam Sancti Benedicti de Monte Oliveto Congregationem cooptatus est) Brixiæ IV. Id. Augusti Anno MDCLXXXXVII., ex honestissima familia, atque inter primarias Triumplinæ Vallis, quæque Gardone haud ignobili vico X. ab Urbe lap. jamdudum opibus, clientelis, authoritate principem facile locum tenuit. Postea in Urbem translata ineunte Sæculo XVII. hic affinitatibus, amicitiis, liberalitate, atque hospitum frequentia maxime floruit. Marchesius ei pater, & Hieronymus avunculus fuit, qui conjunctis licet ædibus, separatim tamen ambo lautiore victu, & elegantiore cultu, quam tunc temporis in hac severioris Italiæ parte moris esset, agebant. Maternum vero genus traxit ex eque illustri Chinelliorum gente. In hac igitur florentis domus suæ dignitate natus est Ludovicus, qui, ubi per ætatem licuit, in Scholis PP. Soc. J. Latinis litteris imbutus est. Postea in Collegio Adeodati Gazolæ Veronensis, quod non procul a paternis ædibus aberat, audivit Rhetorices præcepta interpretantem Franciscum Rotignum non contemnendi quidem ingenii hominem, in cujus scriptis si judicium aliquando requireres, elegantiam certe raro desiderares. Sed noster absurdi-

ditatem morum ejus, & rusticitatem brevi pertesus ad Scholas rursum PP. Soc. se retulit, ubi sub variis magistris omnibus doctrinis, quibus juvenilis ætas impertiri debet, eruditus est. Confecto Philosophiæ cursu ad audiendum nobilem Juris civilis interpretem Felicem Baitellum properavit. Sed nobilissimum hoc Legum studium illi minus arrisit, eodem scilicet fato, quo aliis quoque magnis ingeniis id evenisse legimus. Abjecto igitur non sine patris offensione Jurisprudentiæ studio, ac sibi ipsi redditus circumspicere cœpit, quo se verteret otii impatiens, & cæterarum rerum, quæ illam ætatem oblectare solent, incuriosus, aut contemptor. Cum aliquot menses egisset quem librum fors obtulerat carptim legendo, tandem probe intellexit se vaga, ac intemperanti hac eruditione id prorsus agere, ut nihil sciret. Ego sæpius sermonem injeceram, & hortatus etiam fueram, ut in Geometriam otium illud de quo adeo querebatur impenderet; & ille quidem propensissimo erat erga scientiam ipsam animo, sed demonstrationum tædium aversabatur, & ad hoc nomen ita exhorrebat ac si inter vepres, & dumeta nudis pedibus eundum esset. Postremo hanc ipsam amplexus est, sed proposito sibi scopo longe diverso ab eo vitæ ordine, quam postea instituit. Nam sicut celeberrimus ille Nevvtonus in arcana penitioris Geometriæ tam longe postea penetravit, cum primo sibi illam solummodo delibare proposuisset, ut principia Astrologiæ propius introspiceret, ita & Rampinellius qui sibi nihil aliud præfixerat, quam elementa Architecturæ militaris cujus amore summopere capiebatur vel leviter addiscere, in vastam postea Mathematicarum scientiarum altitudinem se condidit. Sed dum ego occasionem qua id factum est, altius aliquantum repeto, erunt fortassis, quibus ineptire, & nugari videar, sed iis suo quidem judicio relictis, quæ tibi, qui hominem nosti, commemoratu non injucunda fore, quæque ad rem pertinere arbitror, omittere non ausim. Non enim abs re omnino fuerit in vita Insignium Virorum observare qualia sint pri-

prima indicia, ac veluti semina illarum facultatum, quibus postea excelluerunt, ut ii, ad quos hæc observandi cura maxime spectat, vim istis animi affectionibus non inferant, nec feliciora ingenia alio deflectant, eaque obnoxia veluti mancipia in aliquod pistrinum detrudant. Occasio autem qua omnium difficultatum timorem exuit, & studia Geometriæ auspicatus est, hæc fuit. Cum soleret ad me ventitare, solito citius prid. Kal. Junii Anno MDCCXVIII. venit medio fere diei æstu, statimque edixit se velle mecum Arcem, quæ domui meæ imminet, adire, quam scilicet numquam antea inviserat. Imus ergo, nam quodcumque ille vellet flagrantissime volebat, cumque ad oram exteriorem Fossæ constitissemus, tum ille altitudinem mœnium, propugnaculorum sinus cœpit attentius contemplari adeo, ut ab hoc spectaculo ægre divelli posset. Postquam autem primam portam intravimus, & novus murorum ordo, aliaque munimentorum facies se obtulit, illico studio rei militaris summopere accensus est. Cum vero singularum rerum usum, & utilitatem scire vellet, cœpit veteranum, & emeritum militem, qui nobis custos, & dux viæ additus fuerat, tot interrogationibus fatigare, ut iste mihi in aurem postea dixerit, se exiguam illam stipem qua nos eum donavimus, numquam adeo meruisse. Acrius tamen adhuc interroganti obvium se forte obtulit Arcis Propræfectus, qui ubi cognovisset Ludovicum rei militaris cupidissimum, multa cum humanitate se ducem exhibuit, & Machinarum, atque operum omnium interpretem. Quod quidem accurate præstitit, imo & Librum Rampinellio commodavit manu sua scriptum, in quo faciliores quasdam methodos in describendis, & construendis hujusce generis poligonis ex Vaubano, & Cohornio excerptas in usum suum adnotaverat. Potitus hoc veluti thesauro Ludovicus statim regreditur, dumque in descensu Arcis neglecta viæ asperitate librum hac, atque illac versat impacto in extantem silicem pede adeo graviter prolapsus est, ut pene crus infregerit. Nec ideo tamen destitit, quamvis ego sæpius intercederem, sed librum attentissime legere perseveravit, donec veluti a somno experrectus sensit se esse in media urbe, atque in multa hominum frequentia versari. Ubi librum reposuit, ego illi libere prædixi, probe ipsum falli, si quid proficere in eo studio Architecturæ militaris sine Geometriæ præsidio unquam speraret. Domum reversus reliquum diei noctemque fere totam evolvendo libro, & tabulis conspiciendis insumpsit. Hic veniam peto si animi caussa lepidum hominis factum adjungam, utarque pro excusatione verbis Taciti (1) *De caus. cor. eloqu.: Parvum enim, & ridiculum fortasse videtur quod dicturus sum, dicam tamen vel ideo, ut rideatur.* Postridie summo mane cubiculum meum irrumpit, & statim Geometriam se velle discere, jamque omnibus instrumentis ad id necessariis se instructum profitetur, ac deinde grandem circinum ferreum, & immanem regulam depromit, quam sub vestibus ægre tegebat, quo ille apparatu mihi Fabri alicujus lignarii pedissequus plane videbatur. Verum ille de successu studiorum suorum lætus, ut mihi quoque fidem faceret quantum una in nocte profecisset, cœpit prægrandi illo circino in pavimento cubiculi circulum describere, ac circulo exagonum velle inscribere, quod antequam perficeret properavi ego novellum hunc Archimedem domo extrudere, ne mihi totum pavimentum novo hoc ornamenti genere dehonestaret. Unus in Urbe nostra tunc temporis Joannes Baptista Mazinus (si alterum excipias P. Bornatum hujus Magistrum senio jam confectum) Mathematicis studiis operam dabat, qui & medicam artem summa cum laude exercebat, quique paucis post annis in Patavino Licœo celebris Medicinæ Theoricæ Professor fuit, atque editis operibus clarissimam famam, præsertim apud Germanos, & Anglos, adeptus est. Ad hunc ergo affinitate mecum conjunctum, & quo ego magistro biennio ante in hisce studiis uti cœperam,

(1) Sive Quintil. sive quis alius Script.

ram, Rampinellium deduxi, ac summopere commendavi, licet iste jam se satis Mazino, & discendi ardore, & erecta, qua erat, indole probavisset. Cœpit itaque summa cum voluptate, & pari etiam rapiditate elementa Euclidis devorare, jamque primum Librum superaverat, cum improvisus sane turbo illum adflixit, & pene ab incœpto dejecit. In hæc siquidem studia se conjecerat inscio patre, qui adhuc usque speraverat posse filium seu amicorum hortatu, seu paterna authoritate ad Jurisprudentiæ exercitationem revocari. Ubi autem pater deprehendit adeo diversam iniisse viam, tum vero ad se vocatum acriter increpuit in præsentia amicorum, qui frequentes aderant, plerisque eorum irridentibus, & sciscitantibus, num ne Astrologicam artem profiteri vellet? Nullo scilicet discrimine, ut olim Romani, Mathematicos cum Astrologis facile confundebant. Nec stetit intra objurgationes pater, sed filium omni commercio sive cum Mazino, sive mecum, sive etiam cum libris istius generis, severissime interdixit. Imo eo usque excanduit, ut domum universam excuteret, everteretque, quo libros hujusmodi rimaretur; quos diligentissime conquisitos, discerpsit omnes, aut in ignem projecit. Prope abfuit, quin eandem sortem subiret codex etiam ille manu scriptus, quem filio, ut supra memoravi, commodaverat Arcis Propræfectus, nisi illum mater tempestivo officio subtraxisset. Periere eo incendio Maurolycus, Commandinus, Tartalea, Tacquetus, & præterea, quod rideas, Steganographia Trithemii, avitus vetusque in domo liber, quem tamen ob solam tituli invidiam misere suspectum, eisdem flammis inclementer damnavit. Perculsus hac denunciatione, hisque patris intemperiis Ludovicus, & ludibrio adstantium acerrime offensus pene in desperationem actus est. Fugam inde a paterna domo cœpit meditari, ut Veronæ inter gravis armaturæ equites conscriberetur. Suboluit hoc consilium illis ipsis amicis, qui eum paulo ante irriserant, quique pœnitentia ducti, quod optimæ spei adolescentem ipsi quoque veluti in

in præceps adegissent, omnem deinde lapidem moverunt, quo patrem ei conciliarent, & prosequendi hujusce studii veniam obtinerent. Nondum igitur elapso mense a domo avunculi, ad quem noster confugerat, in suam, & in amplexum patris reversus est, adnitentibus PP. Soc. & præcipue inter alios P. Bornato. Optimus enim ille senex, qui usque ad ultimam ætatem hæc studia constantissime coluerat, quique per longas veterum methodos, & ambages pene contabuerat, cum videret ultra montes novum lumen exoriri, viamque paulatim sterni multo magis compendiosam, flagrantissime cupiebat, ut aliquis ex nostris civibus, & præsertim Rampinellius, cujus ingenium perspectum habebat, Algebram capesseret. Reducta itaque animi serenitate Geometriam resumpsit, ac se pristinæ nostræ consuetudini restituit. Duobus vix mensibus alios V. Eucl. Libros, & insuper XI. ac XII. emensus est. Autumnalibus vero feriis se totum Arithmeticæ dedit. Insequenti anno Geometriam practicam, Staticam, Mechanicam, & Trigonometriam linearem ac Logarithmicam didicit, quin aliquid etiam attigit Sectionum Conicarum. Incredibili sane celeritate si adverteris eum per exactas quidem, sed prolixiores Veterum demonstrationes circumductum fuisse, quæ si utilitatis aliquid, moræ profecto ac tædii plurimum afferunt. Sed jam tempus advenerat quo promptissimum hoc ingenium velut e carceribus emitteretur, seque ad eum cursum, quem adeo rapide, adeo feliciter peregit, expediret. Nam excitus fama celeberrimi Gabrielis Manfredi Bononiam cogitare cœpit, & commeatum ad hoc petiit a parentibus, & impetravit. Hic animadverti velim Rampinellium non adeo Geometriæ omnis expertem, & plane rudem, ut quidem volunt, Brixia discessisse, imo ea omnia, quæ supra exposui studia sub Mazino præmiserat, & hoc, ut verbis utar Corn. Nep. *non auditum, sed cognitum prædicamus*. Porro quin hæc comperta, testataque haberemus, haud quidem credibile fuerit Rampinellium ita, ut ferunt, crudum eo usque

uſque confidentiæ proceſſiſſe, ut ſub Manfredo, Geometrarum Bononienſium tunc temporis facile principe, prima tirocinii ſui rudimenta ponere tentaret, & in primo hujus ſcientiæ limine ipſoque in veſtibulo auſus eſſet tantum virum convenire, ad quem per gradus ultimo in ſuperiori loco aſcendere debuiſſet. Nec veriſimile etiam videatur Manfredum tunc penitioris Geometriæ meditationibus alte defixum, noviſque in Analyſi inventis unice intentum, ſe adeo ſubmiſiſſe, ut erudiendi tyronis, perque prima elementa manuducendi onus, & curam in ſe vellet recipere. Non igitur tam pauca Ludovicus primis ſuis Magiſtris debuit, qui eo uſque illum perduxere, ut dignus Manfredo diſcipulus ſtatim haberetur, & ſine quorum opera nec quid ſibi ab iſto petendum, ſperandumque foret, reſcire equidem potuiſſet. Sed nec adeo, ut ipſi aſſerunt, in latino ſermone peregrinus, & amœniorum litterarum jejunus erat cum Bononiam profectus eſt, iis enim optime excultus fuerat, licet præ ſublimioribus ſcientiis, erga quas a natura ferebatur, hæc ornamenta toto fere adoleſcentiæ curſu neglexerit. Liceat duo hæc verba perdidiſſe, nunc ad propoſitum redeamus. Triennium pene integrum, cum Manfredo egit, & duobus quoque inſequentibus annis, quamvis non eadem frequentia poſtquam aliud vitæ inſtitutum amplexus fuerat, ejus auditor fuit. Hoc intervallo totam illius ſcientiam, ut ita dicam, exhauſit adeo ut Clariſſimus Analyſis Profeſſor diſerte fateretur, ſe nihil ultra habere, quod eum doceret. Rariſſimo ſcilicet apud Magiſtros ingenuitatis exemplo, quod ut alii imitentur, optaveris ſæpius quam obtineas. Sed æque rarum inter adoleſcentes modeſtiæ, & grati animi ſpecimen noſter dedit; nam licet a Manfredo non jam ut diſcipulus, ſed ut ſtudiorum ſuorum ſocius haberetur, non ideo tamen altiores ſpiritus ſumpſit, ſed optimum ſenem coluit aſſidue dum ipſe Bononiæ moratus eſt, & quoad vixit ſumma cum reverentia obſervavit ſemper, atque ſuſpexit. Patefacta igitur per calculum, & Ana-
lyſin

lyſin, velut reductis in Theatro velis, tot ſublimiorum veritatum ſerie, tum vero noſter in contemplatione earum altius evectus, cœpit a publico plerumque abſtinere. Divina nempe providentia paulatim ſternente viam, qua is, qui primum inter armorum ſtrepitus, & bellicos tumultus ingenium exercere decreverat, nunc vitaret civium frequentiam, inde amicorum etiam conſortium declinaret, poſtremo ad Clauſtrorum ſolitudinem confugeret. Cogitanti autem quodnam ſanctioris vitæ inſtitutum ſibi, ac ſtudiis ſuis opportunum deligeret, quin Nobiliſſimam Congregationem tuam aliis anteferret, non diu fuit ambigendum. Prius tamen quam omnino deliberaret, ſtatuit hoc conſilium civi ſuo eoque doctiſſimo, ac prudentiſſimo aperire. Is Tu eras, Vir Clariſſime, nam tunc temporis Bononiæ aderas, ibique Theologiæ operam dabas, & tu probe memineris cum ille ante te in cubiculo tuo conſtitit flagrantiſſime rogitans, ut in Clariſſimum ordinem adſciſceretur, adeoque moræ impatiens, impotenſque erat, ut non levem ſuſpicionem tibi injecerit, ne forte ægritudine animi, aut immodico alio affectu ageretur. Tu qua es dexteritate rem in ſuſpenſo tenuiſti donec aptis interrogationibus animum ejus explorares, & donec etiam ſecreta inquiſitione in mores ejus penetrares qui nondum ſatis tibi perſpecti erant. Comperta denique optima juvenis indole tu author, fautorque adfuiſti, ut in egregium hunc Cœtum reciperetur ſummo omnium conſenſu. Contigit id Bononiæ Kal. Novemb. Anno MDCCXXII. In novo hoc vitæ genere id primum curavit, ut omnes Inſtituti leges obſervaret abſolutiſſime, poſtea ſi quid otii reliquum fieret id omne in Geometricas ſpeculationes impenderet. Vix autem elapſis octo menſibus ſatis ſuperque probatus, multo cum animi fervore in Monaſterio S. Michaelis ſolemni ritu votis ſe obſtrinxit. Tum vero quietem, & ſeceſſum, quem tamdiu exoptaverat, nactus, totos ſolidos dies in meditatione curvarum, & calculis Analyticis inſumebat, poſtquam ea quæ ad pie-
tatem

præceptis Artis, aut meliorum opificum monumentis vel tantillum aberrarent. Neapolim postea adiit ibique doctiorum virorum amicitiam iniit, & inprimis celebris Nicolai Martinii, cujus benevolentiam summopere sibi devinxit. Cum igitur doctrinas quas undequaque collegerat suis in dies meditationibus augeret, fama ejus nominis ad Moderatores suæ Congregationis pervenit, iique ad instituendos Mathematicis disciplinis Monachos, eum Bononiam revocarunt. Nec spem fefellit eventus; siquidem ex frequenti selectissimorum juvenum auditorio, veluti a quodam Geometriæ seminario complures prodiere qui hisce studiis Bononiæ non leviter initiati, & postea late per totam fere Italiam distributi, hanc scientiam veluti novam mercem remotis regionibus intulerunt, aliosque subinde ad eam colendam excitarunt. Sed inter alios longe eminebat nobilissimum illud Auditorum par, Pozzius scilicet, & Sommariva, quorum si nomina hic reticerem, male me laudibus Rampinellii consuluisse, ac prospexisse existimarem. Eorum enim alter Romæ in publicis Sapientiæ scholis Mathesin summo cum plausu interpretatur, alter vero æque feliciter eodem munere fungitur Bononiæ apud suos, de se in dies majora promittens. Sinant igitur duo hi præstantissimi viri nomen suum in elogium Rampinellii ceu eorum tesseram, symbolamque a me conferri, nec longinqui, ac plane ignoti hominis leve hoc de eorum meritis pro re nata testimonium velint deprecari. Cæterum a Bononiensibus, apud quos magnum sui desiderium discedens antea reliquerat, cupidissime rursum exceptus est. Hic Physicas institutiones perfecit, in quibus & universam pene Physicam eidem infinitorum calculo subjecit, & ea quæ prius de motus legibus commentatus fuerat inseruit. Jamque doctissimorum civium qui frequentes ad eum conveniebant colloquiis fruebatur, jam innotescere quoque, & coli cœperat apud exteros qui non levem jacturam se facere putabant si illo inviso præterirent, jam denique inclita illa Urbs acerrimo in æstimandis ingeniis judicio, quo arctius Rampinellium sibi obstringerent publicum ei munus destinabat, cum repente eorundem Moderatorum jussu illam derelinquere coactus est invitus invitam. Ob eandem caussam, qua Bononiam adierat, Mediolanum Anno MDCCXL. transfertur, eo scilicet eorum, qui id curaverant, consilio, ut ejus doctrina latius emanaret, & ad plures diffunderetur. Quadam vero felicitate factum est, ut eo tempore Mediolani quoque ageret præstantissima, & per totam Europam celeberrima illa Virgo Cajetana Agnesia non minus morum integritate, quam ingenii acumine maxime commendanda, & quam jure quidem appellaveris nostrorum temporum, & sui sexus ornamentum. Hæc puellari adhuc ætate Mathematicis studiis non mediocriter imbuta fuerat ab Abb. Tagliazucco, quem postea Sardiniæ Rex ad publici Professoris munus evexit in Regio Licœo Augustæ Taurinorum. In rebus autem Philosophicis audiverat celebrem Andream Casatum Cl. Reg. qui pariter ab eodem Rege eodem in Archigymnasio ad aliam Cathedram nominatus est, & deinde Pontificalibus quoque infulis decoratus. Verum cum præclarissima virgo incredibili rapiditate, quodcumque vellet, addisceret, & simul cupiditate inexplebili plura discendi flagraret, cumque ad altiores speculationes in dies semper assurgeret, statuit demum Rampinellium ad se vocare, cujus ope, & consilio se se ab abstrusissimis difficultatibus explicaret. Ille nactus promtissimum hoc ingenium quod adeo excitari non egebat, ut retineri vix posset, brevi ad summum Algebræ apicem perduxit. Hinc eo præeunte prodiit Mediolani Anno MDCCXLVIII. celebratissimum illud opus Institutionum Analyticarum, cujus quam partem vindicare sibi posset Rampinellius per ipsum quidem adhuc in occulto foret, nisi modestissima æque ac doctissima Virgo summa cum grati animi significatione id omnibus testatum in præfatione voluisset. De hujus autem libri pretio post luculentissimum quod de eo edidit testimonium Regia

gia ſcientiarum Academia Pariſienſis, ſupervacuum ſane foret, ſeu potius ridiculum, & ineptum velle aliquid adjicere. Præſtantiſſimi enim ac doctiſſimi Socii, qui ab inclito illo Cœtu ad inſpiciendum Librum ſelecti fuerunt, Mairanus ſcilicet, & Montignius una cum Fouchio a ſecretis in elogio quod typis excuſum eſt Anno MDCCXLIX. diſertiſſime teſtati ſunt, nullum adhuc apud quaſque nationes uſque ad hæc tempora opus in eo genere omnibus adeo numeris abſolutum prodiiſſe. Hæc ego ne de ſingulari ac lectiſſima hac fœmina, deque ejus Libro narrationem abrumperem huc uſque perduxi; cæterum antequam Liber evulgaretur, commotus jam Rampinellii fama Senatus Mediolanenſis Anno MDCCXLVII. ei publicum Matheſeos docendæ munus in Ticinenſi Licæo, ultro obtulit, quin ipſe inter candidatos nomen ſuum de more profiteretur. Acceſſit huic graviſſimo Ampliſſimi Ordinis judicio aliud ſingulare beneficium, nam ei duplicavit ſtipendium, & facultatem dedit ſeu Libros, ſeu Inſtrumenta, quæ ſuis ſtudiis uſui forent, ære publico comparandi. Solemni hoc Decreto ex ſuis latebris in publicam lucem extractus id unum in primis laboravit, ut ne tam gravi judicio impar, ut ne tanti beneficii immemor videretur. Cæterum de prima vitæ conſuetudine nihil detraxit, aut immutavit, æque ac prius acceſſu facilis, eadem qua antea modeſtia, ac pene puellari verecundia, ſumma erga Collegas reverentia, nulla adverſus quemque æmulatione, aſſidue, ac diligentiſſime omnes muneris ſui numeros implebat. Incredibili profecto erat erga Auditores humanitate, ac patientia; ſicubi enim quem paulisper aliquando hærere ſenſerat eum ſtatim adibat, & ſumma cum comitate difficultates extenuando ita recreabat, ut nonnullos ego noverim, qui hujus ſcientiæ aſperitate deterriti animum deſponderant, & retro jam cedere deſtinaverant, quos ille adeo fovit, & in ſpem meliorem erexit, ut feliciter poſtea hunc curſum, nec ſine plauſu confecerint. Quamobrem non ſemel ab eo audiviſſe memini ſæpe illum ſibi inge-

ingenium torſiſſe, ut diverſas eandem veritatem docendi methodos excogitaret, quas quiſque ſibi temperaret pro ingenii ſui modo, atque accommodaret. Verum hæc ſtudia non in umbra tantum coluit, ſed in campum pulveremque eduxit; nam Parpanenſi prædio in ultima ora agri Mediolanenſis ſito, magno in periculo verſanti, quippe cujus ædibus, & campis Padus minaciter immineret, opem tulit. Ibi non ſolum adverſus vim fluminis quod objectis molibus, aggeribuſque difficulter compeſcuit, ſed adverſus etiam accolarum imperitiam, & detrectationes diu eſt conflictatus. Cum enim noſter crates viminibus contextas apte diſponendo rem conficere inſtituiſſet, illi vero munimenta ſumptuoſis arborum trabiumque contignationibus inſtaurari de more contenderent, nihilque aliud facere aut ſcirent, aut vellent, quam quod ſemper feciſſent, egre admodum evicit, ut totius rei gerendæ modus arbitrio ſuo permitteretur, ipſi porro mandata non abnuerent. Imo non levem habuit cauſſam ſuſpicandi, aliquos ex grege operariorum, ut eſt contumax iſtorum hominum ingenium, adeo iniquæ mentis fuiſſe, ut opera quæ ipſe præſcripſerat, conſulto vitiare, & corrumpere tentaverint. Senſit invidiam novorum aggerum Rampinellius, ſimulque fraudem, & dolum ſi forte ſubeſſet veritus, ſtatuit præſens inſtare operi, attentiuſque incumbere, ut omnia ſuis oculis ſubjicerentur, quod dum conſtantius exequitur in paludoſo ſolo, & graviore aere, fortaſſis tum jacta ſunt ſemina illius morbi quo poſtea correptus eſt. Sed aliqui etiam ex fundorum dominis, qui prope Flumen prædia poſſidebant, fidem Rampinellio non adhibuerunt, ſuoque ſibi ingenio, ac more munimenta ſtruxerunt; qui poſtea magno quidem ſuo malo ſenſere quam injuria ab illius monitis, & ſententia defeciſſent. Siquidem primo aquarum incremento ea opera omnia disjecta, & avulſa Padus ſecum abſtulit, uti eventurum noſter paulo ante prædixerat. Extant in Ticinenſi Monaſterio ejus commentarii, in quibus videre poſſis, quomodo non ſolum præſenti pericubus, quæ inter nostros etiam studio partium acriter sæpe agitantur, religiose abstinuit, ita semper compositus, ut in neutram partem conspici posset, quamvis ab omnibus præsidiis esset paratus, & instructus, quibus posset, & subtiliter disputare, & recte judicare. Iisdem principiis imbuit circumspectissimam Agnesiam, de qua supra retuli; nam hæc quoque in conventibus Nobiliorum Fœminarum, quæ intemperantia seu sexus, seu temporum hisce disputationibus frequenter se immiscere solent, semper aut eleganti aliquo temperamento hujusmodi sermones alio deflexit, aut gravissimo silentio filum disceptationis abrupit. De se, deque rebus ac studiis suis atque honoribus sibi habitis nunquam nisi coactus, & tum quidem verecundissime loquebatur, alios vero ubi occasio ferret pro meritis æquissima dispensatione semper ornavit, tam procul a fastidio, & contemptu, quam ab æmulatione, & malignitate. In hoc doctis certe exemplum proposuit, quod si qui moderatione animi eo usque pervenerint, ut famam sui non affectent, aut negligant, id quoque addere velint, ut nec alienæ invideant, detrahantque. Verum omni elogio major in hoc viro laus constantis, ac perpetuæ modestiæ fuit; nam licet ultra Geometram varia, ac multiplici eruditione ornatus, & excultus foret, numquam tamen nec apud exteros, nec inter amicos, nec etiam ubi res opportune cesserat, ingenium, aut doctrinam ostentavit. Ita sæpius evenit quod ait Tacitus de Agricola, ut *plerique quibus magnos Viros per ambitionem æstimare mos est, viso aspectoque* Rampinellio *quærerent famam, pauci interpretarentur*. Singulari etiam fuit erga matrem pietate, quam viduam, & senio confectam (marito enim diu superstes fuit) ut præsentia sua solaretur, fere quotannis Autumnali tempore Mediolano Brixiam ventitare solebat, posthabitis amicis, quorum consuetudine cæteroquin mirifice delectabatur, & relictis amœnissimis tot Procerum Mediolanensium Villis, ad quas studiose, & enixe erat invitatus. Gratia vero qua apud eosdem Proceres

res plurimum valebat nunquam aliter quam in juvandis, tegendisque amicis, usus est. Denique is ille fuit quo haud facile virum magis probum, raro profundiorem Geometram, meliorem vero amicum vix inveneris.

Hæc habui, V. C. quæ ut voluntati tuæ obsequerer, de Rampinellio ad te scriberem. Nec dissimulaverim, me libentius multo quam inchoaveram hæc prosecutum fuisse eo animo, ut Civitatis nostræ decus pro re nata, & pro viribus quodammodo vindicarem. Passim scilicet ut crassioris Minervæ homines traducimur, & sæpius apud exteros audimus, quod de Thebanis olim dictum fuit, nobis nempe *plus virium inesse quam ingenii*. Mihi vero caussas opinionis tam parum æquæ investiganti non aliæ occurrunt, nisi quod partim nostrarum rerum, & laudis civium nostrorum incuriosi simus, partim quod modestia, quæ in Rampinellio fuit summa, universim etiam nostræ gentis sit propria. Ego sicut institutum, & industriam illarum Civitatum ultro laudaverim, quæ rebus suis etiam exiguis pretium addunt, dum eas in lucem proferunt, illustrant, atque accuratissime concinnant, ita æquo animo ferre non possum, nos inclementer nimis ignorantiæ damnari, quod nostras ambitiose non efferamus. Utcumque tamen alii sentiant id unum in præsentia intelligi velim, nobis potius artem, aut studium, quibus nostra ornemus, quam ea, quibus ornemur, deesse. Vale V. C. & me tui obsequentissimum amare perge.

Brixiæ prid. Kal. Junii Anno MDCCLX.

NOI

NOI RIFORMATORI

DELLO STUDIO DI PADOVA

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. F. *Gio. Paolo Zapparella* Inquiſitor Generale del S. Ufficio di Venezia nel Libro intitolato: *Lectiones Opticæ Ramiri Rampinellii Brixiani Congregationis Montis Oliveti ec.* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro i Principi, e buoni coſtumi; concediamo licenza a *Giambatiſta Boſſini* Stampatore *in Breſcia*, che poſſa eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Dat. li 25. Gennajo 1759.

(*Z. Alviſe Mocenigo Rif.*
(*Angelo Contarini Proc. Rif.*
(*Franceſco Moroſini 2. Cav. P. R.*

Regiſtrato in Libro a Carte 35. al Num. 209.

Gio. Girolamo Zuccato Segret.

Adì 7. Febbrajo 1759.
Regiſtrato nel Magiſtr. Eccell. degli Eſecut. contro la Beſtemmia.

Gio. Pietro Dolfin Segret.

LECTIONES OPTICÆ

LECTIO PRIMA.

COnſideranti mihi ſedulo de Optica tradenda vobis, A. O., atque animo revolventi, num eam exponerem Analytica Methodo, ſpeciebuſque algebraicis, infinitorum calculo præterea, ubi res poſtularet, adhibito, an Veterum ſynthetica ratione; occurrebat ſane, & intelligebam, ſi priore illa uterer, conſultum iri maxime tum facilitati, tum brevitati, propterea quod inventis quibuſdam, quas vocant, *formulis* nullo negotio ex iis corollaria pleraque naſcuntur, quæ totidem theoremata ſunt ad rem facientia. Contra vero Veterum geometrica ratio ſeriem quamdam, nec omnino brevem plerumque poſtulat theorematum, & problematum, quibus aditus pateat, & quaſi via ſternatur ad ea, quæ in conſiderationem præcipue cadunt, & ſunt rerum tractandadarum capita. Habet præterea demonstrationes interdum prolixas, implicatas, difficilesque, ut non quolibet, sed acri ingenio opus sit, nec minimo labore. Attamen potissimum posteriorem rationem hanc nihilominus sum secutus, idque ut quidem arbitror, non temere, neque abs re vestra; etenim prior illa, etsi facilior, & brevior, fontes tamen, unde veritates emanant, non satis aperit, nec satis rerum processus in perspicuo lumine collocat; quo fit, ut id quod ipsa docet, potius credas vi regularum, & methodi, quam ratione perspicias; quod longe secus accidit in synthesi, quæ, & quomodo alia ex aliis nascantur ostendit, & eorum nexus, relationes, atque ordinem quam aptissime in conspectum adducit. Accedit eodem utilitas non contemnenda, robur nimirum ingenii, imaginationis vis, ac demonstrandi solers quædam, & evigilata facultas, quæ omnia aut comparantur hac via, aut comparata jam meliora fiunt, & perficiuntur. Duabus itaque propositis viis, postremam ingredior, quod sperem gratum me vobis facturum, si vos, & res opticas coner docere, & idoneos una simul reddam, ac strenuos ad reliquam universam Mathesim, quorum alterum est suscepti muneris, alterum mei in vos studii visum est. Illud vero minime arbitror silentio prætereundum, in his lectionibus me plerumque secutum Isaacum Barovv Anglum, Mathematicum longe nobilissimum, & Geometram summum; verum quid ego, & quomodo commutaverim, quid dempserim, quid addiderim, non refert dicere; is videbit, qui illius Clarissimi viri Lectiones Opticas voluerit cum hisce nostris conferre. Jam vero ut ad rem tandem aliquando accedam, exordior a definitionibus. Sit itaque

DEFINITIO I.

Optica latius sumpta est visibilium scientia, ut *Catoptricam* simul, & *Dioptricam* comprehendere intelligamus. Speciatim vero *Optica* est scientia visionis directæ; *Catoptrica* scientia visionis reflexæ; *Dioptrica* scientia visionis refractæ. Quoniam autem nihil sine lumine videmus, apparentiæ eorum, quæ intuemur, non aliunde, quam ex diversimoda lucis unius operatione proficiscuntur.

Porro, quæcumque tandem sit Physicorum sententia, qui plura de luce disserunt, ejusque natura, non dubium est, quin lumen constet, vel ex motu, vel ex impulsu materiæ cujusdam; ideoque tum excitari in nobis sensationem illam, quæ visio dicitur, cum oculi sensorium a materia hac agitatur lucidum corpus inter nostrosque oculos interjecta. Hujus materiæ motum, seu luminis propagationem, quam citissime fieri, nec tamen in instanti, planum, apertumque fit ex Romeri observationibus, ex quibus ostenditur a Sole a Sole ad nos lumen pervenire tempore octo fere scrupulorum primorum. Hoc idem demonstravit postea Bradlejus, sed alia ratione. Intervallum autem medium inter solem, & nos interjectum est fere leucarum gallicarum 30000000; leuca vero est pedum parisiensium 12000, seu hexapedarum 2000; quamobrem lumen conficit scrupulo primo leucas 3750000; scrupulo secundo leucas 62500, id est hexapedas 125000000, quæ mensuræ si ad milliarium italicum referantur, distantia Solis media a terra invenitur milliariorum italicorum 72000000, eritque spatium a luce peractum tempore unius scrupuli secundi milliariorum 150000, seu passuum 150000000, quorum mille continentur in quolibet milliario, seu pedum 750000000, quorum quinque mille milliarium conficiunt; ex quo jam facile videtis quam mira, & fere incredibilis sit hujusce luminis celeritas; quamque minimam rationem habeat soni velocitas ad velocitatem luminis: propagatur enim sonus, ut ex iteratis, & accuratioribus observationibus compertum habemus, tempore unius scrupuli secundi ad distantiam hexapedarum parisiensium 173, hoc est passuum geometricorum 207, nimirum pedum 1035.

Quoniam vero lumen materia est, & pars quævis luminis lineas describit motu suo, proinde radios singulos ut lineas considerabimus.

DE-

DEFINITIO II.

Radius ab uno in aliud medium incidens, si a plana, vel curva superficie media ipsa dirimente, in idem, unde profectus est, medium reflectatur, ut si incidens BC in planam superficiem PQ, vel curvam HCO (*Fig.* 1.) reflectatur in CE, radius CE dicitur *reflexus* incidentis BC.

DEFINITIO III.

Et si (*Fig.* 1. 2.) in transitu ex uno pellucido medio in aliud incidens radius BC de recta via CI deflectat, pergatque in CM, dicitur CM *radius refractus* incidentis BC.

DEFINITIO IV.

Angulus incidentiæ est angulus, qui linea ab incidente radio descripta, & linea ad reflectentem, vel refringentem superficiem perpendiculari in puncto incidentiæ continetur. Ut si ad planam, vel curvam superficiem PQ, vel HCO media dirimentem sit perpendicularis ACD, angulus BCA est *angulus incidentiæ* .

DE-

DEFINITIO V.

Angulus reflexus, aut *refractus* est ille, qui linea a reflexo, vel refracto radio descripta, & linea ad reflectentem, vel refringentem superficiem perpendiculari in puncto incidentiæ continetur; ut si CE sit radius reflexus, erit ACE *Angulus reflexus*; & si CM sit refractus radius, erit DCM *angulus refractus*.

DEFINITIO VI.

Angulus inflexionis, hoc est *reflexionis* respective, vel *refractionis* est, quem comprehendunt radii, incidens, & inflexus; itaque BCE erit angulus reflexionis, & MCI, producto in directum in I incidente BC, erit angulus refractionis. Hæc autem perinde valent, si radius in planam superficiem incidat, atque in quomodocumque curvam, dummodo in incidentiæ puncto tangens ad curvam ducatur, & quæ comparate ad superficiem planam dicta sunt, ad tangentem intelligantur referri.

DEFINITIO VII.

Punctum radians est quodlibet visibile punctum, unde radii emanant.

DE-

DEFINITIO VIII.

Radii ex uno puncto procedentes, aut qui moventur, quasi ex uno puncto procederent, dicuntur *Divergentes*. Hujusmodi radii semper magis, ac magis disperguntur.

DEFINITIO IX.

Reflexione, aut refractione radii aliquando ita moventur, quasi ex aliquo puncto procederent, quamvis ex hoc revera non procedant; hos quoque *divergentes* vocabimus. In hoc autem casu punctum, ex quo radii divergentes procedere videntur, vocatur *punctum Dispersus* talium radiorum.

DEFINITIO X.

Magis divergentes radii sunt, qui majorem angulum efficiunt. Quo magis radii sunt divergentes, posita eadem inter hos distantia, eo minus distat punctum radians, aut punctum dispersus, & contra.

DEFINITIO XI.

Radii, qui in unum punctum concurrunt, aut continuati concurrerent, vocantur *Convergentes*, & magis Convergentes, quo majorem angulum efficiunt.

DE-

DEFINITIO XII.

Punctum concursus radiorum convergentium vocatur *Focus*.

DEFINITIO XIII.

Punctum, in quod convergentes radii, & ante concursum intercepti, aut deflexi continuati concurrerent, vocatur horum radiorum *Focus Imaginarius*. Quo magis radii convergunt, posita eadem inter hos distantia, eo minus distat focus, sive verus, sive imaginarius.

DEFINITIO XIV.

Si inter parallelos radios unus detur perpendicularis ad superficiem dirimentem media, radii dicuntur *directi*.

DEFINITIO XV.

Corpus luminosum illud est, quod suo lumine radiat. *Corpus illuminatum*, quod radiat lumine aliunde accepto.

DEFINITIO XVI.

Corpus aut medium opacum illud est, quod radios

dios intercipit, seu transitum radiis negat.

DEFINITIO XVII.

Corpus, aut *medium diaphanum*, seu *pellucidum*, seu *perspicuum* est, quod radios transmittit.

Radiorum directiones variari in infinitum possunt; verumtamen radios illos tantummodo considerabimus, qui ex uno puncto procedunt, aut ad unum punctum tendunt, aut sunt paralleli, at horum eos dumtaxat, qui in transitu ex uno medio in aliud satis exiguum spatium occupant in superficie, quæ media separat.

Superficies, quibus media separantur, planæ esse possunt, aut utlibet curvæ. Radius incidens in superficiem curvam, sive convexam, sive concavam perinde inflectitur, ac si incideret in superficiem planam, quæ curvam in puncto incidentiæ tangat; nam plana superficies curvam tangens habet cum illa partem infinite parvam communem, in qua minima parte inflectitur radius.

Quæ de Optica generatim sumpta dicuntur, nituntur omnia legibus quibusdam ab experientia desumptis. Sunt autem hujusmodi leges, præcipue nimirum, quæ sequuntur.

1 *Radios quoslibet in medio uniformi recta pergere quaqua versum a lucido corpore manantes.*

2 *Radium, qui in superficiem vi reflectendi pollen-*

lentem incidit oblique, ita reflecti, ut angulus reflexionis æqualis sit angulo incidentiæ.

3 *Radium oblique incidentem in superficiem, quæ media diversæ densitatis dividit, ita refringi, ut sinus anguli incidentiæ, quicumque hujusmodi angulus sit, habeat ad sinum anguli refracti eamdem semper constantem rationem; at e rariori medio in densius refractum radium accedere ad perpendicularem; contra vero recedere a perpendiculari, si a medio denso in rarius incedat.* Quamobrem si in una radii incidentis inclinatione cognita sit ista proportio, cognita erit etiam in quibuscumque aliis inclinationibus, modo media eadem sint. Præterea hujusmodi radios incidentem, & reflexum, vel refractum esse in eodem plano, quod est perpendiculare ad superficiem media dirimentem.

Constantem rationem inter secantem anguli incidentiæ, & secantem anguli refracti primus omnium invenerat Snellius; ex hac porro vulgavit Cartesius, datam quoque & constantem esse rationem sinuum hujusmodi angulorum. Sit enim (*Fig.* 3.) incidens radius GH, refractus HK, & centro H, descripto circulo ABD, sint GH, KH secantes angulorum incidentiæ, & refracti. Ducantur BC, FE ad superficiem refringentem AD normales. Erit BH, GH :: CH, AH, (seu BH); erit similiter KH, FH (seu BH) :: DH, (seu BH), EH; quare ex æquo perturbate KH, GH :: CH, EH. Igitur data ratione secantium KH, GH, datur quoque ratio sinuum CH, HE.

Incidens igitur radius perpendicularis ad superficiem media dirimentem, aut recta pergit, siquidem detur aditus; aut in suam retro semitam repellitur.

4 *Rationem sinuum anguli incidentiæ, & anguli refracti ab aere in vitrum esse fere, ut 17 ad 11; ab aere in aquam fere ut 4 ad 3.*

5 *Differentiam sinuum anguli incidentiæ, & anguli refracti majorem esse, quo major est differentia inter densitates mediorum.* Pluribus experimentis statuendum fortasse videbitur vim refringentem sequi rationem densitatum mediorum. Verumtamen non satis facile dixerim hanc esse universalem naturæ legem, cum secus id accidat in aliquibus mediis. Compererat enim S. Gravesand Philosophus longe solertissimus lumen in transitu ex Alumine in Vitriolum Genadense, quorum densitates æquales sunt, refractionem subire perpendicularem versus, & sinus esse, ut 26 ad 25; ex quo videmus refractionem sequi, licet mediorum densitates eædem sint. Potest præterea lumen ex medio in medium aliud transire secundum directionem quamcumque sine ulla refractione, quamvis media densitate differant. Lumen etiam potest sæpe in transitu ex medio densiori in rarius refringi ad perpendicularem. Hæc autem a laudato clarissimo Philosopho experimentis locu-

lentem incidit oblique, ita reflecti, ut angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ.

3 *Radium oblique incidentem in ſuperficiem, quæ media diverſæ denſitatis dividit, ita refringi, ut ſinus anguli incidentiæ, quicumque hujuſmodi angulus ſit, habeat ad ſinum anguli refracti eamdem ſemper conſtantem rationem; at e rariori medio in denſius refractum radium accedere ad perpendicularem; contra vero recedere a perpendiculari, ſi a medio denſo in rarius incedat.* Quamobrem ſi in una radii incidentis inclinatione cognita ſit iſta proportio, cognita erit etiam in quibuſcumque aliis inclinationibus, modo media eadem ſint. Præterea hujuſmodi radios incidentem, & reflexum, vel refractum eſſe in eodem plano, quod eſt perpendiculare ad ſuperficiem media dirimentem.

Conſtantem rationem inter ſecantem anguli incidentiæ, & ſecantem anguli refracti primus omnium invenerat Snellius; ex hac porro vulgavit Carteſius, datam quoque & conſtantem eſſe rationem ſinuum hujuſmodi angulorum. Sit enim (*Fig.* 3.) incidens radius GH, refractus HK, & centro H, deſcripto circulo ABD, ſint GH, KH ſecantes angulorum incidentiæ, & refracti. Ducantur BC, FE ad ſuperficiem refringentem AD normales. Erit BH, GH :: CH, AH, (ſeu BH); erit ſimiliter KH, FH (ſeu BH) :: DH, (ſeu BH), EH; quare ex æquo perturbate KH, GH :: CH, EH. Igitur data ratione ſecantium KH, GH, datur quoque ratio ſinuum CH, HE.

Incidens igitur radius perpendicularis ad ſuperficiem media dirimentem, aut recta pergit, ſiquidem detur aditus; aut in ſuam retro ſemitam repellitur.

4 *Rationem ſinuum anguli incidentiæ, & anguli refracti ab aere in vitrum eſſe fere, ut 17 ad 11; ab aere in aquam fere ut 4 ad 3.*

5 *Differentiam ſinuum anguli incidentiæ, & anguli refracti majorem eſſe, quo major eſt differentia inter denſitates mediorum.* Pluribus experimentis ſtatuendum fortaſſe videbitur vim refringentem ſequi rationem denſitatum mediorum. Verumtamen non ſatis facile dixerim hanc eſſe univerſalem naturæ legem, cum ſecus id accidat in aliquibus mediis. Compererat enim S. Graveſand Philoſophus longe ſolertiſſimus lumen in tranſitu ex Alumine in Vitriolum Genadenſe, quorum denſitates æquales ſunt, refractionem ſubire perpendicularem verſus, & ſinus eſſe, ut 26 ad 25; ex quo videmus refractionem ſequi, licet mediorum denſitates eædem ſint. Poteſt præterea lumen ex medio in medium aliud tranſire ſecundum directionem quamcumque ſine ulla refractione, quamvis media denſitate differant. Lumen etiam poteſt ſæpe in tranſitu ex medio denſiori in rarius refringi ad perpendicularem. Hæc autem a laudato clariſſimo Philoſopho experimentis locu-

lentissimis comprobantur ; sed omnino peculiaria sunt, ut de his nullam rationem posthac simus habituri, & monuisse sat erit.

Ceterum cum constet ex Optica Clarissimi Nevvtoni radios luminis omnes non ejusdem esse refrangibilitatis, constans illa sinuum ratio admittenda est diversa in singulis radiorum speciebus ; quamobrem rationes sinuum experimentis cognitæ in lege 4 de radiis medium refrangibilitatis gradum obtinentibus, hoc est, qui virides apparent, intelligendæ sunt ; etenim colores rubei omnium minime refrangibiles sunt, reliqui autem aurei, flavi, virides, cærulei, indici, violacei gradatim ex ordine magis, magisque refrangibiles fiunt. Differentia refrangibilitatis tamen adeo parva est, ut in iis, quæ agenda nobis sunt, ratio nulla haberi debeat, eruntque nobis hujusmodi radii omnes perinde, ut si æque essent refrangibiles.

Causas vero exquirere, cur aut angulus incidentiæ angulo reflexionis æqualis sit, aut constans ratio sinuum anguli incidentiæ, & refracti, & hujusmodi plura, ad Physicos spectat, qui in plures, & contrarias sententias distracti, & inter se dissentientes, quisque suam tuetur, ita ut rationum momentis omnino destitutus minime videatur. Nos autem has leges ab experientia sumentes, & de earum causis nihil omnino solliciti, hac super re ne verbum quidem sumus facturi.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Si lumen propagatur per radios parallelos in medio non resistente, luminis intensitas non variatur.

Axiomatis instar haberi potest. Nam cum sint radii paralleli, eamdem semper inter se distantiam servant ; propagantur autem in medio non resistente ; igitur nullus intercipitur, nullius vis immutatur ; ergo luminis intensitas erit ubique eadem.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

Si lumen propagatur in medio non resistente per radios divergentes, intensitas luminis decrescit in ratione duplicata distantiarum a puncto radiante, reciproce.

Sit A (*Fig.* 4) punctum radians, & centro A, semidiametris AC, AB intelligantur descripta duo Hemisphæria DCE, HBG. Radii ab A manantes ad distantiam AC diffunduntur per hemisphærium a semicirculo DCE descriptum, vel per ejus partem quamlibet ; ad distantiam vero AB diffunduntur per hemisphærium semimicirculo HBG descriptum, vel per ejus partem prioris similem. Erunt igitur luminis intensiones in locis DCE, HBG reciproce, ut superficies, per quas lumen diffunditur; sed hujusmodi superficies sunt, ut quadrata semidiametrorum AC, AB; ergo & intensiones luminis erunt in duplicata ratione reciproca semidiametrorum, hoc est distantiarum a puncto radiante.

Aliter. Sit punctum radians A (*Fig.* 5), & ad rectam AB sint normales DE, HG, & diametris DE, HG describantur circuli, quorum plana sint ad AB normalia, quæ erunt inter se parallela. Qua parte luminis illuminatur area circuli DE, eadem illuminatur area circuli HG; ergo erit intensio luminis in circulo DE ad intensionem in circulo HG reciproce, ut sunt areæ circulorum, nempe ut quadratum HB ad quadratum DC, hoc est ut quadrata proportionalium BA, CA; ergo intensio luminis decrescit in ratione duplicata distantiarum a puncto radiante.

Corollarium.

Igitur si lumen propagatur per radios convergentes in medio non resistente, densitas illius crescit in ratione duplicata reciproca distantiarum a puncto concursus.

Scho-

Scholion Primum.

Sit radiantis puncti A (*Fig.* 6) distantia AI a plano IK ad ipsum normale, sitque KI ad IA, ut unitas ad 2000000, radii AI, AK sumi poterunt ad sensum perinde ac si essent paralleli. Invenietur enim per tabulas trigonometricas angulus A unius circiter scrupuli secundi; quapropter anguli I, & K simul ad sensum non differunt a duobus rectis, & lineæ AI, AK erunt ad sensum parallelæ. Immo vero licet angulus A sit dimidium scrupuli primi, lineæ AI, AK ad sensum in rebus præsertim physicis assumi poterunt, ut parallelæ. In hoc autem casu ratio IK ad IA, per canones trigonometricos, est fere, ut unitas ad 6877. Diameter pupillæ oculi humani satis ampliatæ vix quintam partem digiti excedit, hoc est quinquagesimam pedis, igitur si IK sit diameter pupillæ, distantia IA; quæ angulum A faciat dimidium scrupuli, invenietur pedum 137. Ergo ubi radiantis puncti distantia ab oculo excedat pedes 137, incidentes in pupillam radii assumi poterunt ad sensum paralleli.

Scholion Secundum.

Si objectum AB radiet per exiguum foramen C (*Fig.* 7) in parietem album loci obscuri, situ converso in pariete albo depingetur. Nam, quia foramen exiguum est, radii a puncto B manan-

manantes occurrent parieti in b per rectam Bb, qui vero a puncto A manant, occurrent parieti per rectam Aa in a. Non autem confunduntur radii in tranſitu per foramen C (per notam proprietatem luminis); ergo in pariete & exhibent objectum, & ſitu converſo, ſe mutuo decuſſantibus radiis Bb, Aa in puncto C.

LECTIO SECUNDA.

RAdiis directis ultra id, quod ſuperiore Lectione conſideravimus, non fere aliud quidquam accidit, quod indigeat explanatione; quamobrem de radiis inflexis ſit nobis ſermo.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

Dato cuivis incidenti radio inflexum, hoc eſt reflexum, ſeu refractum aſſignare.

Datus ſit (*Fig.* 8) incidens radius AB in reflectentem curvam ſuperficiem OBO, vel planam PBQ, quæ curvam tangat in B, & quæratur reflexus. Centro B, intervallo quovis BA, deſcribatur circulus, ſitque ad BQ perpendicularis MB, cui normalis ducatur AHC; juncta BC erit radius reflexus.

Sunt enim AH, HC æquales ſinus angulorum ABH, CBH in eodem radio; ergo æquales anguli; ergo (per legem ſecundam) erit radius BC incidentis AB reflexus.

Ut incidentis ejuſdem AB habeatur refractus, ſumatur HD (*Fig.* 8, & 9), ad quam habeat AH eam proportionem, quam habet ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti e medio H in medium G; nempe ſit AH ad HD, ut I ad R (terminis I, & R hic, & deinceps ſemper proportio refractionem metiens indigitabitur); tum fiat DE ad perpendicularem MB parallela, ſecans circulum in E, & ducatur BE, erit linea hæc radius refractus incidentis AB. Nam EG normalis ad MG eſt ſinus anguli EBG, & eſt æqualis HD; eſt ergo AH, GE:: I, R; igitur (per legem 3.) BE eſt refractus quæſitus. Si radius e rariori medio in denſius tranſeat, erit I major, quam R, & AH major quam HD, & refractus BE accedet ad perpendicularem (*Fig.* 8). Si contra radius e denſiori medio tranſeat in rarius, erit I minor quam R, & AH minor HD, & refractus BE recedet a perpendiculari (*Fig.* 9), idque in ſequentibus erit ſimiliter intelligendum.

Vel ſit quoque MB (*Fig.* 10) ad refringentem ſuperficiem PQ, vel OBO perpendicularis, & ad diametrum in hac libere ſumptam BM deſcribatur ſemicirculus incidentem radium AB ſecans in R, tum juncta RM, factoque I, R:: RM, quartam T, circulo aptetur MH ipſam T exæquans, erit connexa HB, nempe producta in E, incidentis radii AB refractus, quoniam RM ſinus anguli incidentiæ RBM in radio BM eſt ad ſinum HBM in eodem radio, ut I ad R.

Vel ſumpta in BP (*Fig.* 11) utcumque BK pro

pro diametro, circulus deſcribatur KHB incidentem radium AB ſecans in R, & fiat I, R:: BR, quartam T, & in circulo adaptetur BH æqualis T, erit ducta HBE ipſius incidentis AB refractus radius. Nam angulus BKR eſt æqualis angulo incidentiæ ABM, & ſinus eſt BR in radio BK. Angulus BKH eſt æqualis angulo HBM, & ſinus eſt BH in eodem radio BK; ergo angulus HBM, vel EBV erit angulus refractus, & BE quæſitus radius.

Aliter etiam cum refringens medium eſt ſphærica ſuperficie terminatum, quod uſui fortaſſe interdum eſſe poteſt. Incidat utcumque radius AB (*Fig.* 12) productus in P in ſphæricam ſuperficiem, ſeu circulum BPG, cujus diameter BG. Fiat BQ quarta proportionalis ad R, I, BG: tum diametro BQ deſcribatur circulus BHQ. Circulo BPG adaptetur GT æqualis BP, & centro B per T ducatur arcus HT ſecans circulum BHQ in H, & juncta HB, quæ circulum BTG ſecet in O, ducatur OG, cui æqualis accommodetur BX: erit BX radius refractus incidentis AB. Nam, ductis HQ, PG, XG, propter angulos BOG, BHQ rectos ſunt parallelæ OG, HQ, ideoque BH, hoc eſt BT, BO:: BQ, BG:: I, R. Eſt autem GT æqualis BP, & GO æqualis BX; ergo BT æqualis PG, & BO æqualis GX; ergo GP, GX:: I, R: ſunt autem GP, GX recti ſinus angulorum incidencidentiæ GBP, & refracti GBX; ergo &c.

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

Parallelorum radiorum AB, MN (Fig. 13) *in rectam lineam* EF *incidentium reflexi* BD, NH *sunt etiam ipsi sibi paralleli.*

Quoniam AB, MN ponuntur parallelæ, erunt anguli ABE, MNE æquales; ergo & qui istis æquales sunt DBF, HNF erunt æquales inter se; quare rectæ BD, NH erunt parallelæ.

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

Sit recta ABZ (Fig. 14) *ad reflectentem* EF *perpendicularis, cum hac vero* AZ *promanantis ab* A *radii cujusvis* AN *reflexus* NH *retro productus conveniat in* Z: *dico fore* AB *æqualem* BZ.

Esse enim debet angulus ANB æqualis angulo HNF; hic vero æquatur angulo ZNB; ergo triangula BNA, BNZ sibi mutuo sunt æquilatera; ergo latus AB æquale BZ.

PRO-

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

Si radius AC (Fig. 15) *e medio* Z *moveatur trans medium densius* X *terminatum duobus planis parallelis* EF, HL, *&* *transeat in tertium medium* Z *idem ac primum, radius ultimo refractus in* BG *erit incidenti* AC *parallelus.*

Ductis ad superficies EF, HL perpendicularibus NM, PO, sinus anguli ACN est ad sinum anguli MCB, ut sinus anguli GBP ad sinum eumdem anguli CBO, sive MCB, quia eadem media sunt primum, & ultimum; ergo æquales sunt sinus, & anguli ACN, GBP; ergo ad parallelas æqualiter inclinantur AC, GB; quamobrem & ipsæ sunt inter se parallelæ.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

Si radius per varia media transeat, quæ planis parallelis sint terminata, directio radii in ultimo medio eadem est, ac si lumen ex primo medio in extremum immediate pertransisset.

Sint mediorum (*Fig.* 16) superficies parallelæ EF, HL, MN, radius incidens AB, sitque ratio refractionis ex primo in secundum medium

ea,

ea, quæ est I ad B; ex secundo in tertium, quæ est B ad D; ex tertio in quartum, quæ est D ad R, & sic porro, & sint radii AB, BC, CR, RZ. Sinus anguli ABD est ad sinum anguli IBC, ut I ad B; sinus anguli IBC, seu BCG ad sinum anguli PCR, ut B ad D; sinus anguli PCR, seu CRS ad sinum anguli XRZ, ut D ad R; ergo ex æquo sinus anguli ABD radii incidentis est ad sinum anguli radii ultimo refracti, ut I ad R.

Scholion.

Hinc oritur facilis, & expedita demonstratio regulæ, qua, data ratione refractionum á primo in secundum medium, item data ab eodem primo in tertium, habetur ratio refractionum a secundo in tertium. Regula vero hujusmodi est. Sit ratio refractionum a primo in secundum medium ea, quæ est I ad R; a primo eodem in tertium eá, quæ est *i* ad *r*, erit ratio refractionum a secundo medio in tertium, ut *i* R ad I*r*. Sint media A, B, C (*Fig.* 17), & radius oblique incidens ON, qui refringatur in N, M, L, & erigantur SNT, HMG, RLV. Erit igitur I, R:: sinus anguli ONS ad sinum anguli TNM (seu NMH); & multiplicando priores terminos harum rationum per eamdem *i*, erit *i*I, *i*R:: sinus anguli ONS, sinum anguli NMH. Similiter erit *i*, *r* :: sinus anguli (per propositionem hanc) ONS, sinum anguli LMG, & multiplicando priores harum rationum terminos per eamdem I, erit *i*I, I*r*:: sinus anguli ONS, sinum anguli LMG. At permutando terminos utriusque Analogiæ, erit *i*I, sinum ONS:: *i*R, sinum NMH; & *i*I, sinum ONS:: I*r*, sinum LMG; quare ex rationum æqualitate erit *i*R, I*r*.: sinum anguli NMH, sinum anguli LMG. Quamobrem si medium A sit aer, B aqua, & C vitrum, sitque refractionis ratio ex aere in aquam, ut 4 ad 3; ex aere in vitrum, ut 17 ad 11, erit ratio refractionis ex aqua in vitrum ut 17 x 3 ad 11 x 4, nempe ut 51 ad 44.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

Parallelorum rectæ lineæ incidentium radiorum refracti sunt etiam ipsi paralleli.

Incidentes radii in EF (*Fig.* 18) sint AB, MN, qui, quoniam sunt paralleli, faciunt angulos ABV, MNG cum perpendiculis BV, NG æquales; itaque habebunt æquales angulos refractos TBH, SNK. Ergo BH, NK refracti radii erunt inter se paralleli.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

Radii cujusvis incidentis inflexus inflexi vicissim incidens evadit.

Hoc explanari magis indiget aliquo modo; quam demonstrari. Et primo in casu reflexionis sit AB (*Fig.* 13) radius speculo EF impingens, & reflectatur in BD; dico radium DB permutatim in BA reflecti. Nam quoniam AB incidens reflectitur in BD, erit angulus DBF æqualis angulo ABE. Sit jam BD incidens, angulus similiter, quem facit ejus reflexus cum BE, æquatur angulo DBF; proinde angulus hujusmodi non alius erit quam angulus ABE; quare BA reflexus erit.

In refractione vero incidat radius AB (*Fig.* 19) in superficiem EF, ibique refringatur in BD: dico permutatim radium DB regredientem refringi in BA. Per occursum B ducatur QBP ad media dirimentem EF perpendicularis, & in hac utcumque sumpto puncto P, ducatur PG ad AB protractam normalis, & PH normalis ad BD, & producatur DB in S. Est ergo PG sinus anguli incidentiæ ABQ ad radium BP, & PH sinus anguli refracti PBH (seu QBS) ad eumdem radium. Cum itaque ratio PG ad PH refractionem metiatur a superiori medio factam in inferius, etiam vicissim rectarum PH, PG proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in superius. Unde si radius DB jam ponatur incidens, cum sint PH, PG recti sinus anguli incidentiæ PBH, & anguli refracti PBG, liquidum est ipsum HB in BA refringi. Id autem facile etiam ex Propositione VI deduci potest.

Corollarium.

Ex posterioribus hisce propositionibus nullo negotio duo problemata solvuntur, quorum primum est. Radium datæ rectæ parallelum designare, cujus refractus per datum punctum transeat.

Sit BR (*Fig.* 20) superficies plana refringens, M punctum datum, & AB recta, cui incidens radius parallelus quæritur. Radii incidentis secundum AB inveni (per Propositionem III) refractum BI, huic parallelum age MR. Si ducatur RF ad AB parallelus, erit incidens, cujus refractus transit per M. Alterum problema est: radium e dato puncto progredientem designare, cujus refractus rectæ cuipiam positione datæ sit parallelus. Recta positione data sit IB, punctum datum F. Rectæ IB refractum radium inveni BA; per F duc FR parallelam ad AB, & RM parallelam ad BI, erit RM radius refractus.

Scholion.

Illud tamen advertendum est, in casu radii e rariori medio in densius incidentis, ipsum radium semper, qualiscumque ejus sit obliquitas, medium densius subire, & per ipsum incedere. Veruntamen in casu altero cum ex medio densiori in rarius lux incurrit, non ea semper medium hoc permeabit. Etenim si magna satis obliquitas fuerit, habita insuper ratione refractionis mediorum, contingere potest ut radius inflexus sit in ipsa superficie refringente EF (*Fig.* 19.), aut etiam supra illam attollatur, angulusque inflexus rectum æquare possit, aut etiam superare, & radius, qui refractus expectabatur, fiat reflexus. Sit in exemplum radii AB angulus incidentiæ semirectus, & proportio refractionem metiens sit illa, quæ est inter quadrati latus, & diagonalem, quæ fere exponit, ut constat experientia, rationem ex aqua in aerem. Erit itaque sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti, ut PG ad PB (*Fig.* 19); ergo angulus refractus rectus erit. Si major fuerit aut angulus incidentiæ in assignata proportione refractionis mediorum, vel in dato angulo semirecto major proportio mediorum, angulus refractus recto major erit, & radius incidens reflectetur in idem medium supra rectam EF. Ex hoc igitur patet propositionem hanc, nempe radium incidentis inflexum

xum fieri vicissim incidentem inflexi, posse aliquando esse falsam; numquam enim radius ad EF parallelus inflectetur in BA.

PROPOSITIO X.

Theorema.

Angulus incidentiæ major ad angulum suum refractum majorem rationem habet, quam angulus incidentiæ minor ad refractum suum.

Esto incidens radius DB (*Fig.* 21) in superficiem QP; angulus incidentiæ major DBO (seu FBN), angulus refractus HBN. Alter radius incidens AB, angulus incidentiæ minor ABO (seu EBN), refractus CBN. Diametro BN utcumque sumpta describatur circulus BFEN, qui radios BF, BH, BE, BC secet in punctis F, H, E, C, ductisque lineis NF, NH, NE, NC, fiat angulus FBK æqualis ENC, & connectatur recta FC, quæ secet NK in R, itemque rectæ FH, CE. Quoniam anguli NFC, NEC, eidem arcui NC insistentes, æquales sunt, nec non anguli FBK, ENC ex constructione, erunt similia triangula FNR, ENC; quapropter erit NF, RN :: NE, NC. Sed per legem 3 NE, NC :: NF, NH; erit igitur NF, RN :: NF, NH, seu erit RN æqualis NH. Est autem RN minor NK; ergo go NK, utpote major NH, cadet supra H. Quamobrem arcus FH, seu angulus FBH major arcu CE, seu angulo CBE. Ergo major angulus incidentiæ FBN ad angulum suum refractum HBN majorem rationem habet, quam minor angulus incidentiæ EBN ad refractum suum CBN.

Corollarium Primum.

Angulo itaque incidentiæ majori major convenit angulus inflexionis. In refractione enim jam demonstratum est angulum FBH majorem esse angulo EBC. Quod ad reflexionem res est manifesta ipsa per se; angulus enim reflexionis incidentiæ majori conveniens eum plane continet, qui minori incidentiæ respondet.

Corollarium Secundum.

Hæc demonstratio locum habet, ubi radius e rariori medio in densius ingreditur; verumtamen facile infertur conclusio etiam in casu, quo radius e densiori medio rarius pervadat. Nam si vicissim radii HB, CB concipiantur incidentes; erunt ipsi BD, BA refracti, atque ideo & anguli FBN, EBN erunt refracti; sunt enim ad verticem cum angulis DBO, ABO. Anguli porro refractionis sunt similiter iidem ipsi FBH, EBC.

Co-

Corollarium Tertium.

In refractionis casu, quo radius e densiori medio in rarius propagatur, nempe cum I minor est, quam R, si anguli incidentiæ, exemp. grat. DBQ, (*Fig.* 22) rectus sinus PH ad sinum totum se habeat, ut I ad R, nullus incidente DB obliquior radius medium EF refractus ingredietur. Nam penetret, si fieri potest, obliquioris alicujus ABG refractus BM; erit ergo (per legem 3) PG sinus incidentiæ anguli ABQ ad PM sinum anguli refracti PBM, ut I ad R, hoc est (per hypothesim) ut PH ad PB; est autem PG major quam PH; ergo PM major quam PB; quod fieri nullo modo potest; ergo AB non refringetur in medio EF. Idem vero & supra vidimus in Scholio præcedentis propositionis.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

Si in cujuscumque generis curvam, vel rectam lineam RBS (Fig. 23, 24, 25, 26, 27) *duo diversa media dirimentem incidat radius* MNO, *sitque ad dictam lineam perpendicularis recta* NC, *& in hac utcumque sumpto puncto* C, *per quod transeat incidenti radio parallela* CB, *quicum conveniat ipsius incidentis* MO *inflexus* GNK,

erit

erit in reflexione (Fig. 23) KN *æqualis* KC; *in refractione vero* (Fig. 24, 25, 26, 27) *erit* KN *ad* KC, *ut* I *ad* R, *nempe in ea ratione, quæ est refractionis*.

Et primo in reflexione angulus ONC æqualis est angulo KNC (per legem 2), & angulus ONC æqualis est KCN, quia ON, CB sunt parallelæ; igitur erunt æquales anguli KCN, KNC, atque ideo æquales lineæ KN, KC, idque sive incidat radius ab M in directione MN, sive ab O in directione ON, hoc est sive exterius in curvam, sive interius.

In refractione (*Fig.* 24, 25) sit diaphanum ad partes P densius, & infra N sumatur punctum C. Conveniet quidem refractus radius incidentis MN cum BK; nam (per legem 3) angulus PNK minor esse debet angulo MNQ, atque ideo minor PCK. Porro quia sinus anguli MNQ ad sinum anguli CNK eam rationem habet, quæ est refractionis, sinus autem anguli MNQ idem est, qui anguli MNP, seu NCK; igitur in triangulo NCK habebit sinus anguli NCK ad sinum anguli CNK rationem refractionis; quamobrem (per theorema trigonometricum, quo demonstratur in quovis triangulo latera esse sinibus angulorum oppositorum proportionalia) eamdem quoque habebit latus NK ad latus CK; ergo erit NK, CK :: I, R.

Hinc

Hinc patet & conversa propositio, nempe KC existente parallela radio MN, rectæque NK occurrente, si fuerit NK ad KC in ratione refractionis, tunc fore NK refractum radium incidentis MN.

Sit nunc diaphanum ad partes Q densius (*Fig.* 26, 27). Sumatur punctum C supra N, & reliqua peragantur, ut supra factum est. Quia radius MN a densiori medio exit in rarius, erit angulus PNK major angulo CNM, atque ideo angulo NCK; ergo CK, NK conveniant in puncto K. Porro, ex refractionis lege, sinus anguli PNK ad sinum anguli CNM, vel NCK proportionem habet refractionis; sinus autem anguli PNK idem est, qui sinus anguli CNK; igitur in triangulo CNK habebit sinus anguli NCK ad sinum anguli CNK proportionem refractionis. Ergo, per jam supra memoratum theorema trigonometricum, eamdem rationem habebit NK ad CK; eritque NK, CK::I, R.

Rursus vero & conversa propositio perspicua est, nempe si CK parallela existente radio incidenti MN, rectæque NK occurrente, fuerit NK ad CK in ea ratione, quæ est refractionis, fore etiam NK refractum radium incidentis MN.

Corollarium.

Et si a puncto C (*Fig.* 24) ducantur ad incidentem MN productum, si opus est, & ad refractum

ctum NK normales CF, CI, erit CF, CI:: I, R. Eſt enim CF ſinus anguli CNF, qui æquatur angulo incidentiæ, & CI ſinus anguli refracti in eodem radio CN. Id autem in figura 24 indicaſſe ſat eſt; idem valet in reliquis.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA.

Producta præterea, ſi opus eſt, KC, *ut tangentem puncti* N *ſecet in* T, *erit in reflexione* (Fig. 23) KT *æqualis* KN; *& recta* NT *angulum* KNM *ſecabit bifariam.*

Quia anguli ad verticem GNO, MNK æquales ſunt, & ſunt æquales (per legem 2) GNV, MNT, erit & reliquus VNO æqualis reliquo TNK, & propter parallelas OM, CT, angulus VNO æquatur angulo NTK; ergo æquales ſunt KNT, KTN; ergo æqualia latera KN, KT. At angulo KTN eſt etiam æqualis angulus MNT; ergo KNM bifariam ſectus eſt a tangente VNT.

In refractione (*Fig.* 24, 25, 26, 27) erit KT ad KN, ut coſinus anguli refracti KNP ad coſinum anguli incidentiæ MNQ.

Eſt enim ſinus rectus anguli VNK coſinus anguli refracti KNP; ſinus rectus anguli NTK, ſeu æqualis TNM eſt coſinus anguli incidentiæ

MNQ; ſed hujuſmodi ſinus ſunt, ut latera angulis oppoſita; ergo latera KT, KN erunt etiam, ut coſinus angulorum incidentiæ, & refracti.

LECTIO TERTIA.

Ex iis, quæ in proxima superiore lectione sunt dicta, non erit fortasse abs re proprietates nonnullas pervulgatas quidem Sectionum Conicarum circa radiorum inflexiones nullo negotio demonstrare. Quapropter sit linea RBS Parabola Apolloniana (*Fig.* 23), cujus axis BC; in quam sive extrinsecus ex plaga M, sive intrinsecus ex plaga O incidat radius MN, vel ON ad axem parabolæ parallelus, ejusque reflexus sit NG, vel NK. Est igitur (per Propositionem XI) KN æqualis KC, utcumque sumpto in curva puncto N; at ex notissima parabolæ proprietate, ductæ KN, KC ab umbilico parabolæ, qui sit K, æquales pariter sunt; quare cujusvis ad axem paralleli radii reflexus necessario per umbilicum transibit, incidentium quidem exterius, ut NM, reflexus NG, eritque K focus imaginarius. Incidentium vero interius, ut ON, reflexus ipse in umbilicum cadit, & K iccirco focus verus dicitur.

Idem aliter & brevius demonstratur, alia assumpta Parabolæ proprietate. Nempe si K sit umbilicus, ex quo ducatur quælibet KN, & sit ONM axi parallela, erunt anguli ad tangentem VT facti KNT, ONV æquales; atque ideo æquales etiam TNM, VNG, & æquales ONC, KNC.

In

In Ellipsi vero (*Fig.* 28), cujus axis BD, umbilici H, K, perpendicularis CN ad curvam, hoc est ad tangentem in puncto quovis N, bifariam secat angulum HNK, quæ est curvæ proprietas; quamobrem quilibet radius a focorum alterutro egrediens in alterum reflectitur a curva ellipsi.

Porro in Hyperbole (*Fig.* 29), cujus umbilici sint H, K, tangens NT cujusvis puncti N angulum HNK bifariam secat, per curvæ proprietatem; sed producta in directum HN in E, est etiam angulus HNT æqualis angulo VNE; ergo æquales sunt anguli TNK, VNE, HNT, INV, producta KN in I; igitur radius quicumque KN a foco K egressus reflectitur in NE, qui ad interiores partes productus cadet in alterum focum H. Egressus autem radius a foco H, nempe HN reflectetur in NI, qui ad exteriores partes productus cadet in K focum alterum.

Si vero curva Ellipsis, & Hyperbola non reflectendi, sed refringendi vim habeant, contineantque media diaphana, incidat in Ellipsim primo radius MN (*Fig.* 28) axi BD parallelus. Quoniam CN bifariam secat angulum HNK, erit NH, NK :: HC, CK (per Propos. 3 lib. 6 Eucl.), & componendo, NH cum NK, hoc est (per proprietatem ellipsis) BD, NK :: HK, CK; & permutando, BD, HK :: NK, CK; quamobrem si talis fuerit ellipsis,

ut

ut sit BD, HK :: I, R, hoc est in ratione refractionis, erit etiam NK, CK :: I, R; incidentis igitur MN (per Propositionem XI) refractus erit NK. Omnium itaque incidentium ad BD parallelorum refracti per focum K transibunt.

Eadem ratione divergentes in diaphano a puncto K egredientur omnes ad BD paralleli.

In Hyperbola (*Fig.* 29), cujus axis BD, CN ad curvam normalis, & reliquis, ut antea, præparatis, erit (per notam tangentis proprietatem) angulus TNK æqualis angulo TNH; ergo (per Propositionem 3 lib. 6 Eucl.) NH, NK :: TH, TK; sed est etiam (per aliam normalis NC notam proprietatem) CH, CK :: TH, TK; igitur NH, NK :: CH, CK, & permutando NH, CH :: NK, CK. Est autem (per proprietatem focorum) NK æqualis DB cum NH; porro CK est æqualis CH cum HK: ergo tota NK, hoc est DB cum NH est ad totam CK, hoc est CH cum HK, ut ablata NH ad ablatam CH; ergo erit & tota NK ad totam CK, ut reliqua DB ad reliquam HK; quamobrem si hyperbola fuerit hujusmodi, ut sit DB, HK :: I, R, erit etiam NK, CK :: I, R. Incidentis igitur radii cujusvis MN (per Prop. XI) refractus erit NK. Omnium itaque in diaphano ad BD parallelorum radiorum incidentium refracti per punctum K transibunt.

Itaque etiam divergentes extra diaphanum a puncto K ingredientur omnes ad BD paralleli.

Hic autem eruditionis gratia theorema non injucundum addo, quod etsi minus ad Lectiones Opticas pertineat, facit tamen ad rem opticam.

PROPOSITIO XIII.

THEOREMA.

Si radius AB (Fig. 30) *e rariori medio* P *in densius* Q *incidens refringatur a medio* EQF *in* BC, *sitque luminis velocitas in primo medio ad velocitatem in secundo in ea proportione, quæ est refractionis, nempe ut* I *ad* R, *tempus motus luminis per* ABC *est omnium brevissimum.*

Fac lumen per alias vias venisse, & primo per AFC. Sit PB normalis ad EF, & ducantur AO, BH normales ad AB; & FO parallela; & FG normalis ad BC. Angulus HBF est æqualis PBA, & angulus BFG est æqualis QBC; igitur sinus anguli HBF erit ad sinum anguli BFG, ut velocitas luminis in medio P ad velocitatem in medio Q; at sinus illi sunt rectæ HF, BG in radio, seu sinu toto BF; ergo lineæ illæ erunt inter se, ut velocitates; & si radius incidens esset OF, tempus per HF esset æquale tempori per BG. Sed tempus per AB est æquale tempori per OH; ergo tempus per OF æquale est tempori per ABG. Rursum tempus per FC lon-

longius eſt, quam per GC; ergo tempus per OFC longius eſt, quam per ABC. At AF major eſt, quam OF; ergo tempus per AFC multo longius eſt tempore per ABC. Fac nunc radium luminis veniſſe ab A in C per viam AKC. Sit NC perpendicularis ad BC, & KN parallela; BM perpendicularis ad KN, & KL ad BA. Sunt BL, KM ſinus angulorum BKL, KBM, id eſt PBA, QBC, ideoque ſunt inter ſe, ut velocitates luminis; ergo tempus per BL æquale eſt tempori per KM, & cum tempus per BC æquale ſit tempori per MN, tempus per LBC æquale erit tempori per KMN. At tempus per AK longius eſt, quam tempus per AL; ergo tempus per AKN longius eſt, quam tempus per ABC. Et cum KC major ſit, quam KN, tempus per AKC eo longius erit tempore per ABC. Itaque liquet tempus per ABC eſſe omnium breviſſimum.

PROPOSITIO XIV.

PROBLEMA.

Puncti ad infinitam diſtantiam ad ſenſum remoti, ſyderis veluti alicujus locum apparentem determinare per refractionem viſi.

Sit punctum radians infinite ad ſenſum diſtans A (*Fig.* 31) oculi centrum O, ſuperficies divi-

vi-

videns media ſit EF, incidens radius AN, refractus NM, per O ducatur OBZ ad MN parallela; in hac apparebit punctum A.

Ducatur AB; cum radii AN, AB ſint (per Scholium primum Prop. II) ad ſenſum paralleli, etiam ipſorum refracti (per Prop. VI) erunt paralleli; cum igitur MN ſit refractus ipſius AN, etiam BO ad MN parallela erit radius refractus incidentis AB. Ergo punctum A in recta OB protenſa apparebit.

Corollarium.

Puncti itaque ad infinitam ad ſenſum diſtantiam imago per refractionem effecta infinite quoque diſtat, quoniam per parallelos radios videtur.

LE-

LECTIO QUARTA.

Restat nunc ut aliqua, eaque pauca dicamus de loco apparente, seu imagine puncti alicujus radiantis, ac in planam superficiem incidentis ad completam reflexionis theoriam. Sit itaque

PROPOSITIO XV.

PROBLEMA.

Dati puncti radiantis A (Fig. 32) *cujus radii incidant in reflectentem superficiem planam* EF, *locum apparentem, seu imaginem determinare.*

Sit AZ ad reflectentem planam superficiem EF perpendicularis, sintque incidentes radii, quot volueris, AN, AM ec. Sumpta BZ æquali AB, (per Propositionem v) quilibet radius incidentium AN, AM reflexus ON, SM inferius productus cum recta BZ conveniat in Z; igitur videbuntur perinde, atque a puncto Z divergentes manarent, eritque punctum Z ipsius A locus apparens, & imago perfectissima; imaginis enim vocabulo intelligo aliud nihil, nisi locum, a quo plures radii, tot scilicet, quot afficiendo visui satis sunt, similiter emergere, vel emanare videntur perinde, ac si a primariis objectis diffunderentur.

Co-

Corollarium Primum.

Quotquot igitur objectum A intuentur in speculo, illud in eodem loco Z videbunt, si tamen in eodem omnes existant plano ABF.

Corollarium Secundum.

Radii per speculum planum reflexi divergentes cum sint, neque lumen clarius efficiunt, neque calorem solis, aut alias emanationes quascumque intendunt, sed contra remittunt, & debiliores reddunt.

Corollarium Tertium.

Hinc patet qui sit axis, seu reflexus principalis radius pro quovis oculo imaginem intuente, ille nimirum, qui per oculi, exemp. gr., O centrum transit, quod denominatur præcipuum reflexionis, ut vocant, punctum. Connexa nempe recta ON, erit hic axis, & ejus cum EF intersectio N erit punctum reflexionis.

PROPOSITIO XVI.

PROBLEMA.

Datis puncto radiante A (Fig. 32), *& oculi loco* O, *invenire punctum reflexionis* N.

Demittantur ex A, & O in superficiem reflectentem EF perpendiculares AB, OP, tum fiat, ut

F sum-

ſumma incidentiæ, & reflexionis AB, OP ad AB, ita BP ad BN; erit N quæſitum punctum.

Nam anguli B, & P recti ſunt, & æquales præterea eſſe debent ANB, ONP; erit igitur OP, AB :: PN, BN, & componendo, OP cum AB, AB :: PB, BN.

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA.

In ſpeculo plano horizontali imago inverſa videtur.

Sit EF ſpeculum horizontale (*Fig.* 33) planum, objectum ſpectabile AB, oculus ad O. Punctum A objecti reflectitur in NZ, ac proinde id ipſum punctum A videbitur per productum inferius radium ZN in R. Punctum vero B, quia majori angulo incidit, majori angulo reflectetur, nempe in NP; videbitur itaque per productum radium in Q ſupra punctum R.

Corollarium.

Eadem omnino ratione in quovis ſpeculo plano dextera apparent ſiniſtra, & ſiniſtra videntur dextera.

PROPOSITIO XVIII.

PROBLEMA.

Datis puncto radiante A (Fig. 34) *& puncto quovis* O, *hiſque immotis manentibus intelligatur moveri ſuperficies, ſeu linea reflectens* EF, *ita tamen, ut ad quamdam* PO *ſit ſemper parallela; locum punctorum omnium* N *invenire, ut reflexus* NV *per punctum* O *tranſeat.*

Ducatur AP ad PO perpendicularis, & bifariam ſecentur AP in X, & PO in Y, & per X ducatur XG ad PO parallela, item per Y ducatur YH parallela ad AP, & XG, YH concurrant in C, tum aſymptotis CG, CH per O deſcribatur hyperbola ROS; hæc per omnia reflexionum dictarum puncta tranſibit.

Ducta utcumque EF ad PO parallela hyperbolæ occurrente in N, ductiſque rectis AN, ON, angulus ANE erit ſemper æqualis angulo ONF. Nam producta AP ſecet EF in B, & ſit OQ ad AB parallela. Ex hyperbolæ natura eſt CD, CY :: YO, DN; quare dividendo, YD, hoc eſt OQ, CY :: NQ, DN, & permutando, OQ, NQ :: CY, DN. Rurſus, quia eſt CD, CY :: YO, DN, erit componendo, CD cum CY, hoc eſt AB, CY :: YO cum DN, hoc eſt BN, DN, & permutando, AB, BN :: CY, DN. Eſt autem etiam CY, DN : OQ, NQ; ergo AB, BN :: OQ, NQ; igitur triangula ANB, ONQ ſunt ſimilia; ergo angulus ANE æqualis angulo ONF.

 LE-

LECTIO QUINTA.

HActenus accidentia reflexionis ad planam superficiem contemplati sumus, nec fere quidquam in rem hanc occurrit, quod addi mereatur. Præterea promiscue nonnulla sunt exposita symptomata refractionis, quod affinitatem quamdam, & nexum haberent cum illis. Verumtamen in refractione punctum radians consideravimus perinde, atque esset ad infinitam distantiam; nunc vero illud ipsum sumemus, tamquam cominus radians. Itaque sit

PROPOSITIO XIX.

THEOREMA.

Sit ad rectam refringentem EF *perpendicularis* AB (Fig. 35, 36), *in qua sit punctum radians* A *ab* EF *ad sensum non longe remotum, a quo procedentis cujusvis radii, velut* AN, *refractus sit* NM, *cum ipsa* AB *retro protractus conveniens in* K: *dico fore* NK, NA :: I, R; *& si fuerit* NK, NA :: I, R, *erit* KNM *refractus radius incidentis* AN.

Ducatur QNP ad EF perpendicularis; angulus NAB æqualis est angulo incidentiæ ANQ; & angulus NKB æqualis angulo refracto MNP; qua-

quapropter erit I, R :: sinus anguli NAB (vel complementi NAK), sinum anguli NKB, in transitu quidem e rariori medio in densius (*Fig.* 35); & in opposito casu (*Fig.* 36) erit I, R :: sinus anguli NAB, sinum anguli NKB (vel complementi NKA). Sed latera sunt sinubus angulorum oppositorum proportionalia; ergo erit etiam I, R :: NK, NA.

Et si latera NK, NA se habeant, ut I, R, etiam dictorum angulorum sinus se habebunt similiter; quamobrem refractus KNM ad incidentem AN pertinebit.

Idem demonstratur per Propositionem XI. Producatur AN in V, sitque MC parallela ad AN, & MV parallela ad AB. Erit (per Propositionem XI) MN, MC (hoc est MN, NV) :: I, R; hoc est propter similia triangula NMV, NKA, erit NK, NA :: I, R.

Corollarium Primum.

Hinc particularis emergit expeditissimus modus hujusmodi quotcumque refractos designandi. Nam per radians punctum A ducatur (*Fig.* 37, 38) AB ad refringentem EF perpendicularis, & fiat AB, ZB :: R, I, tum per Z ducatur recta GH ad EF parallela. Proponatur jam quilibet incidens AN, cui conveniens refractus designandus sit; protrahatur NA, si opus est, ut cum GH conveniat in S, tum centro N per S descri-

describatur circulus ipsam AB secans in K (secabit autem, si refractus aliquis ad incidentem AN pertineat, quod mox demonstrabo), erit connexa NK protractaque radii AN debitus refractus. Etenim est KN, AN :: SN, AN :: SD (seu ZB), AB :: I, R; unde liquet propositum.

Quod autem circulus centro N per S descriptus secet AB, si refractus aliquis ad incidentem AN pertineat, sic demonstro. Hujusmodi circulus rectam AB tangat in B (*Fig.* 39). Erit ergo SP sinus anguli incidentiæ ad sinum totum SN, seu BN, seu AV :: BZ, BA, nempe :: I, R; sed (per Corollarium 3 Propositionis x) in hoc casu nullus incidente AN obliquior radius medium EF refractus ingredietur, & ipsius AN refractus incedet per EF: quamobrem si sit possibilis refractus aliquis, secabit utique circulus SK rectam AB.

Corollarium Secundum.

Igitur quo casu refractio fit e rariori medio in densius, idest cum I major est quam R, concursus omnium refractorum cum recta AB, quem *radiationis* hujus *axem* appellare licebit, supra punctum Z existit. Nam connexa NZ, quoniam angulus NZS, recto major, (*Fig.* 37) major est angulo NSZ; erit NS, vel NK major NZ; ideoque BK major BZ. Item in casu

su, quo media contrarie se habent, dictus concursus infra punctum Z erit. Etenim rursus (*Fig.* 38), connexa NZ, angulus NSZ, recto major, major quoque est angulo NZS, ideoque NZ major, quam NS, vel NK, & ideo BZ major quam BK. Hinc liquet punctum Z esse limitem, ultra, vel citra quem respective omnes refracti cum axe AB concurrunt. Quin immo ipsius perpendicularis AB quasi refractus in ipsum punctum Z terminatur.

PROPOSITIO XX.

LEMMA.

Sit AB *ad* EF *normalis* (Fig. 40), *&* *a duobus in* AB *sumptis utcumque punctis* A, *&* I, *quorum* A *sit ipsi* B *propius*, *ad duo puncta quævis* M, N *in recta* EF *connectantur rectæ* AN, AM, *&* IN, IM: *dico fore* AN *ad* AM *in majori ratione*, *quam* IN *ad* IM.

Centro N per A describatur circulus PAOR rectas IM, IN secans in punctis O, R, & per R ducatur RT ad EF parallela, secans IM in S. Ob angulum NRT obtusum, patet rectam RT extra circulum totam cadere; quare erit SM major quam OM, & quam AM, ideoque erit AN ad AM in majori ratione, quam AN ad SM; sed est AN, SM :: RN, SM :: IN, IM;

IM; igitur liquet esse AN ad AM in majori ratione, quam IN ad IM.

PROPOSITIO XXI.

THEOREMA.

Si duorum radiorum (Fig. 41) AM, AN *in rectam* EF *incidentium, quorum hic obliquior, refracti* MP, NP *cum axe* AB *conveniant in punctis* I, K*; erit in casu medii rarioris in densius* IB *minor* KB*; in altero casu, nempe medii densioris in rarius, erit* IB *major* KB.

Connexa IN, est in primo casu NK, NA :: MI, MA (per Propos. xix) & permutando NK, MI :: NA, MA; sed (per Lemma præcedens) NA ad MA majorem rationem habet, quam NI ad MI; igitur NK major, quam NI, quamobrem BK major, quam BI. At in secundo casu est NK, MI :: NA, MA similiter, sed NA est ad MA in minori ratione, quam NI ad MI; quare NK minor NI, & inde BK minor BI.

PROPOSITIO XXII.

THEOREMA.

In rariori medio sit radians punctum A (Fig. 42) *cujus radii incidant in superficiem medii densioris* EF, *ac fiat* ZB, AB :: I, R, *& diametro* BZ *semicirculus describatur, cui a puncto* B *adaptetur* BD *æqualis* BA, *& per puncta* Z, *&* D *ducta recta* ZDY, *quæ refringenti* EF *occurrat in* Y, *tum ad semiaxes* BZ, BY, *centro* B *describatur hyperbola* HZG*; in hac autem, sumpto quovis puncto* S, *ducantur* SN *ad* AB, *&* SK *ad* BN *parallelæ; denique ducantur* AN, KNX*; erit* KNX *incidentis radii* AN *refractus*.

Est enim per curvæ proprietatem differentia quadratorum ex BK, & BZ ad quadratum KS, vel BN, ut quadratum ZB ad quadratum BY, nempe quia similia sunt triangula ZBY, ZDB, ut quadratum ZD ad quadratum DB. Quamobrem erit $\overline{BK}^2 - \overline{BZ}^2$, $\overline{BN}^2 :: \overline{ZD}^2$, $\overline{DB}^2$, nimirum erit $\dfrac{\overline{BK}^2 - \overline{BZ}^2}{\overline{ZB}^2 - \overline{DB}^2} \times \overline{DB}^2 = \overline{BN}^2$, ergo $\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 +$ $\overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \dfrac{\overline{BK}^2 - \overline{BZ}^2}{\overline{ZB}^2 - \overline{DB}^2} \times \overline{DB}^2$, & reducendo ad eamdem denominationem, $\overline{AN}^2 = \dfrac{\overline{BK}^2 - \overline{BA}^2}{\overline{ZB}^2 - \overline{BA}^2} \times$

$\overline{BA}^2$, quia BA, BD ponuntur æquales. Porro est

$$\overline{KN}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{KB}^2 + \frac{\overline{BK}^2 - \overline{BZ}^2}{\overline{BZ}^2 - \overline{DB}^2} \times \overline{DB}^2, \text{ \&}$$

reducendo ad communem denominatorem, $\overline{KN}^2$

$$= \frac{\overline{BK}^2 - \overline{BA}^2}{\overline{BZ}^2 - \overline{DB}^2} \times \overline{BZ}^2, \text{ seu } \overline{KN}^2 = \frac{\overline{BK}^2 - \overline{BA}^2}{\overline{BZ}^2 - \overline{BA}^2} \times$$

$\overline{BZ}^2$; ergo $\overline{AN}^2, \overline{KN}^2 :: \overline{BA}^2, \overline{BZ}^2$, & ideo AN, KN :: R, I; quamobrem (per Prop. XIX) erit KNY incidentis AN refractus radius.

Corollarium.

Et quia, ut neminem latet, hyperbola ZSG est ad partes BN convexa, si a puncto Z per R, a puncto R per S ducantur rectæ ZT, RP, partes RT, SP extra curvam cadent; quamobrem, ductis IRV, KSQ ad BN parallelis, & MR, NV, OQ parallelis ad BA, ac sumptis BM, MN, NO ec. æqualibus, hoc est æqualibus IR, RV, SQ ec. inter se, quia TV æquatur ZI, erit SV, seu KI major quam IZ; & quia est PQ æqualis SV, erit GQ, seu LK major quam KI, & sic porro. Igitur quo radii ab A manantes sunt axi viciniores, eo ipsorum refracti spissius incedunt, seu minora sunt in ZL con-

concursuum interstitia, ut consertiores sint, quo propius ad partes Z acceditur. Seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis MN, NO ec. erit IK ad KL in minori ratione, quam MN ad NO. Quamobrem quoniam bene multorum perpendiculari AB adjacentium radiorum refracti, velut e puncto Z, manare videntur, & circa ipsum constipantur præcipue, erit Z punctum concursus.

PROPOSITIO XXIII.

Theorema.

Sit radians punctum A (Fig. 43) *in medio densiori, nempe sit* R *major quam* I, *& eadem ratione determinata* BZ, *ut in præcedenti Propositione, videlicet ut sit* ZB, AB :: I, R, *describatur semicirculus ad diametrum* AB, *& huic accommodetur* BD *æqualis* BZ, *& connexa, protractaque* AD *refringenti occurrat ad* Y; *tum centro* B, *semiaxibus* BZ, BY *describatur Ellipsis* HZG; *in hac accepto quovis puncto* S, *ducantur* SN *ad* ZB, *&* SK *ad* BF *parallelæ, connectantur autem* AN, KN, *erit* KNX *incidentis radii* AN *refractus*.

Est enim, per curvæ proprietatem, differentia quadratorum ex BZ, & BK ad quadratum ex KS (seu BN), ut quadratum ex BZ ad quadra-

 tum

tum ex BY, nempe, quia similia sunt triangula ADB, BDY, & sunt æquales BZ, BD, ut quadratum ex AD ad quadratum ex AB. Quamobrem erit $\overline{BZ}^2 - \overline{BK}^2, \overline{BN}^2 :: \overline{AD}^2, \overline{AB}^2$, nimirum $\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AD}^2} \times \overline{AB}^2 = \overline{BN}^2$, seu $\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BZ}^2} \times \overline{AB}^2 = \overline{BN}^2$; ergo $\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \frac{\overline{BZ}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BZ}^2} \times \overline{AB}^2$, & reducendo ad communem denominatorem, $\overline{AN}^2 = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BZ}^2} \times \overline{AB}^2$. Porro est $\overline{KN}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{KB}^2 + \frac{\overline{BZ}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BZ}^2} \times \overline{AB}^2$, & reducendo ad communem denominatorem, $\overline{KN}^2 = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2}{\overline{AB}^2 - \overline{BZ}^2} \times \overline{BZ}^2$; ergo $\overline{AN}^2, \overline{KN}^2 :: \overline{AB}^2, \overline{BZ}^2$, & ideo AN, KN :: AB, BZ :: R, I; quamobrem (per Prop. XIX) erit KNX incidentis radii AN refractus.

Corollarium.

Et quoniam, ut notum est, Ellipsis est ad partes BF concava, si a puncto Z per R, & a puncto R per S ducantur ZT, RP, partes RT, SP erunt extra curvam; quamobrem sumptis BM, MN, NO ec. æqualibus, hoc est si producantur IR, KS, & ducantur MR, NV, OQ ad BA parallelæ, sumptis æqualibus IR, RV, SQ ec. inter se, erit SV major quam TV, hoc est KI major quam IZ; & quia est PQ æqualis SV, erit GQ, seu LK major quam KI, & sic porro. Igitur quo radii ab A manantes sunt axi viciniores, eo ipsorum refracti spissius incedunt. Seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis MN, NO ec. erit IK ad KL in minori ratione, quam MN ad NO ec. Differentiæ igitur, seu concursuum interstitia semper minora fiunt, quo propius ad Z acceditur, atque ideo propinquorum axi radiorum refracti circa Z maxime congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

PROPOSITIO XXIV.

THEOREMA.

Tendant radii omnes, ut LF (Fig. 44) *ad punctum* D *in medio densiori situm, & sit* TA *ad* DA *in ratione refractionis; erunt aliqui radii,* *quorum refracti a superficie* EF *convenient cum* AD *producta in puncto, quod dato quolibet intervallo minus distet a puncto* T.

Sumatur punctum C dato intervallo propius ad punctum T situm, & magis distans ab A, quam T. Ut est differentia quadratorum TA, DA ad quadratum DA, ita sit differentia quadratorum CA, DA ad quadratum DS. Igitur quia differentia prior minor est posteriore, erit quadratum AD minus quam quadratum DS, & linea DA minor linea DS; ideoque si centro D, intervallo DS circumferentia describatur, ea secabit rectam AF, exemp. gr. in F; quapropter ducatur DF producta in L, & ducatur CF. Quoniam differentia quadratorum TA, DA est ad quadratum AD, ut differentia quadratorum CA, DA ad quadratum DS, vel DF, erit componendo quadratum TA ad quadratum DA, ut differentia quadratorum CA, DA cum quadrato DF ad quadratum DF. Est autem differentia quadratorum CA, DA (hoc est (per Propos. 4 lib. 2 Eucl.) quadratum CD cum duplo rectangulo CDA), addito quadrato DF, æqualis quadrato CF (per Prop. 12 lib. 2 Eucl.); ergo ut quadratum TA ad quadratum DA, ita quadratum CF ad quadratum DF, & linea CF ad lineam DF, ut linea TA ad lineam DA, hoc est in ratione refractionis (per hypothesim) ergo constat (per Prop. XI) radii incidentis LF refractum esse FC. Itaque ostensum erit alicujus incidentis radii refractum quolibet intervallo propius convenire ad punctum T cum axe AD.

Corollarium Primum.

Omnes itaque incidentes radii intra A, & F secabunt, dum refringuntur, axem intra T, & C, ubi erunt confertissimi.

Corollarium Secundum.

Hic autem notandum est radiorum omnium ad punctum quodvis D tendentium refractos eosdem omnino esse, ac illos, qui divergentibus a D responderent, modo ceteris manentibus invariatis, refringente scilicet EF, & puncti D loco, media percipiantur transposita. Si (exemp. grat.), FC sit refractus incidentis LF ad D tendentis e raro in medium densius, erit itidem FN positus in directum cum CF radii DFL e raro in densius procedentis refractus. Itaque quæ de radiis divergentibus ostenduntur, ea convergentibus, adhibito justo moderamine, pariter adaptari possunt, in horum locum divergentes congruos subrogando, & vicissim. Quare in omnibus, quæ sequuntur, si de radiis solummodo divergentibus instituemus sermonem, subintelligemus etiam convergentes, qui ex hac regula determinari ri queunt, eodem referri. Quamobrem quoniam incidens radius LF in medium densius ita refringitur, nempe in FC, ut refringeretur DF incidens, si medium densius esset ad N, & porro quoniam (per Corollar. secundum Proposit. XIX) omnes a puncto D procedentes ita refringuntur in medium densius N, ut retro producti axem omnes secent remotius a D, quam sit T; sic ad D tendentes in densiori medio D ita refringi debent, ut refracti omnes axem secent a D remotius, quam sit T. Propius tamen magis ac magis ad T accedunt refracti ii, quorum incidentes propiores sunt ad axem GC.

PROPOSITIO XXV.

THEOREMA.

In planam superficiem (Fig. 45) BO *media diversæ densitatis dirimentem incidant radii quotcumque* FM, XN, VO *omnes ad punctum* A *collineantes, sintque æquales interceptæ* BM, MN, NO: *radii refracti* MI, NK, OL *secabunt in verticali* BL *partes* IK, KL *semper majores, hoc est erit* LK *major* KI: *ipsique radii erunt ad verticalem* BL *convergentes*.

Ex punctis M, N, O ducantur ad AB parallelæ MR, NS, OG: item ex punctis I, K, L parallelæ IR, KS, LG ad BO. Jam si radii FM, XN, VO transeant a rariori medio in densius (ut in *Fig.* 45); puncta R, S, G erunt in hyperbola descripta secundum leges Prop. XXII. Cum vero ex Corollario citatæ Propositionis LK sit major KI, jam liquet interceptas a radiis refractis in verticali BL semper majores fieri. Si radii e densiori medio rarius ingrediantur (ut in *Fig.* 46) puncta R, S, G erunt in Ellipsi ad leges Propos. XXIII exarata; ex cujus pariter Corollario constat LK majorem esse KI. Q.E.P.

Quoniam angulus incidentiæ AMR minor est altero angulo incidentiæ ANS, etiam angulus refractus IMR minor erit angulo refracto KNS, seu MYN; anguli igitur interni ad eamdem partem IMR, KYM duobus rectis sunt minores; ergo radii MI, NK ad verticalem vergunt. Idem dicas de radiis KN, LO. Quod erat alterum.

SCHOLION.

Punctum dispersus, & concursus radiorum, quale sit, postquam in superficie aliqua, aut plana, aut curva refracti fuerint, jam in definitionibus vidimus. Verumtamen quoniam hoc nomine etiam puncta designantur plerumque, ad quæ tamen refracti radii non accurate respondent, quomodo id intelligendum sit paucis exponam. Propositione XXIV (*Fig.* 44) ostensum est radium quemdam LF, ita refringi ad C, ut diſtantia CT ſit quavis data quantitate minor ; præterea ex ſuperiori Propoſitione demonſtratur incidentes radios, ut PQ, ad LF propiores propius refringi ad punctum T minori ſemper intervallo, ita ut ibi confertiſſimi ſint ; itaque punctum T, etſi minus accurate, vocabimus tamen punctum concurſus. Similiter ſi in lentem ACB (*Fig.* 47) incidentes paralleli radii poſt refractionem conveniant cum axe DCE citra punctum quoddam E omnes, vel omnes ultra hoc modo, ut quo radius quiſque axi propinquior fertur, eo refractus concurrat propius ad punctum E; idque ad diſtantiam tandem quavis data minorem, tum quoque punctum E punctum concurſus dicetur. Non ſecus in eadem Propoſitione XXIV (*Fig.* 44), ſi radii veniant a puncto D in ſuperficiem EF medii denſioris L, ſumpto, ut ibi, puncto F, & ducta TF, vel CF (perinde enim eſt, propterea quod punctum C ſit ad T infinite proximum) eſt CF, DF :: I, R. Ergo (per Propoſ. XIX) CFN radius erit refractus incidentis DF. Itaque radius DF ita fertur refractus, quaſi ex puncto C, vel T manaret, ideoque erit T punctum diſperſus. Eodem modo in lente cava AFG (*Fig.* 48) ſi parallelos radios a parte H venientes poſt refractionem ita ſpargi oſtendatur, ut retrorſum producti conveniant cum axe FH omnes citra punctum quoddam H, vel omnes ultra, iiſdemque con-

conditionibus, quas in convexa poſuimus, tum punctum H dicetur punctum diſperſus.

PROPOSITIO XXVI.

PROBLEMA.

Data diaphani ſuperficie plana, & puncto, ex quo manantes radii intrinſecus in eam deferantur, invenire punctum diſperſus refractorum.

Sit plana ſuperficies diaphana AE (*Fig.* 49) & punctum T datum in denſiori medio, ex quo ad ſuperficiem AE ferantur radii, ut TF. Sit TA recta ad ſuperficiem AE perpendicularis, & ita dividatur in D, ut ſit TA ad DA in proportione refractionis. Dico D fore punctum diſperſus quæſitum, ut nempe FL refractio radii TF feratur, quaſi ex puncto D procederet. Jungatur LFD. Si igitur LF eſſet radius incidens in ſuperficiem AE, tendenſque ad punctum D, ejus refractio foret in FT (per Propoſ. XIX), quia nimirum TA ad DA eſt proportio refractionis. Igitur viciſſim (per Propoſ. IX) radii TF refractio erit LF; quare D eſt punctum diſperſus quæſitum. Hoc autem punctum erit hujuſmodi, ut radiorum refractiones omnes ſupra D concurrant (per Corollarium ſecundum Prop. XIX), hoc eſt, ut concurſus eorum minus diſtet a ſuperficie AE, quam punctum D.

 PRO-

PROPOSITIO XXVII.

PROBLEMA.

Data diaphani superficie plana, & puncto extra diaphanum, ad quod tendentes radii intrinsecus in superficiem ejus incurrant, invenire punctum concursus refractorum.

Superficies diaphana plana sit AE (*Fig.* 50) medium densius L, & punctum extra datum T, ad quod tendentes radii, ut LF, occurrant superficiei AE intrinsecus. Sit TA ad superficiem normalis, eaque secetur in D ita, ut TA ad DA habeat rationem refractionis: dico D esse punctum concursus quæsitum. Constat enim per Propos. XIX) si DF sit radius incidens, ejus refractum fore FL; igitur vicissim (per Propos. IX) erit FD refractio radii LF, ac proinde D punctum concursus radiorum tendentium ad T. Nullus autem radius concurret ultra D.

Scholion.

Ex his nullo negotio colligitur, si punctum A radiat (*Fig.* 51) sitque medium A densius medio O, quæ media dirimat recta, seu plana superficies EF, ac fiat AB ad ZB in ratione refractionis, esse locum, seu imaginem puncti A in Z, oculo existente in O. Sit enim DH diameter pupillæ in plano EAFO, & per hujus extrema transeant radiorum AM, AP, refracti IMD, IPH. Jam patet nullius obliquioris, quam AM, AP, ut AN, vel AQ refractum oculum ingredi; quamobrem obliquiores hujusmodi nihil omnino ad visum pertinent. Porro, positis MI, PI refractis incidentium AM, AP, reliqui omnes intra P, & M incidentes concurrent cum axe AO intra puncta I, & Z, ut jam superius (Coroll. secundum Propos. XIX) demonstravimus; quapropter intra spatium ZI necessario versabitur objecti imago; & quoniam qui propius ad Z concurrunt, ceteris confertiores sunt, ut pariter est demonstratum, & quia oculo rectius occurrunt, præcipua vi pollent, objectum A videbitur ita, ac si radios projiceret a puncto Z. Præterea propter exilem pupillæ latitudinem totum spatium ZI perquam angustum erit, ac poterit instar puncti merito æstimari.

Accedit eodem experientia, qua plane compertum est objectum, veluti A, in aqua situm oculo O perpendiculariter imminenti ita distans videri, exemp. grat. in Z, ut sit perpetuo AZ quarta pars ipsius AB, quod omnino præcedentibus ratiociniis consonat; est enim refractionis ratio ex aqua in aerem, ea, quæ intercedit inter 3 & 4.

Si objectum A fuerit in rariori medio, tum erit Z supra punctum A, atque ideo ultra punctum A erit locus imaginis, quod satis patet, ut expositione non egeat.

L E-

LECTIO SEXTA.

DEfinivimus proxima superiori lectione imaginis locum ob oculum in axe positum; reliquum est, ut hoc ipsum præstemus oculi gratia extra axem ubivis siti, quod mox consequemur; in quam rem sit

PROPOSITIO XXVIII.

THEOREMA.

Sit in rariori medio radians punctum A (Fig. 52) *radius incidens quivis* AN *in superficiem* EF, *refractus* PNK, *& descripto circulo* VST, *sit ratio diametri* VT *ad chordam* VS *ea, quæ est refractionis, nempe* I *ad* R. *Si fiat* YB, AB :: VT, ST, *& connectatur* YN, *erit* KB, YN :: ST, SV.

Est namque (per hypothesim) $YB = \frac{AB \times VT}{ST}$, & $YN^2 = \frac{AB^2 \times VT^2}{ST^2} + BN^2$, hoc est $YN^2 = \frac{AB^2 \times VT^2 + BN^2 \times ST^2}{ST^2}$. Porro (per Prop. XIX) est AN,

NK

NK :: VS, VT, atque ideo $NK^2 = \frac{AN^2 \times VT^2}{VS^2}$, hoc est $NK^2 = \frac{\overline{AB^2 + BN^2} \times VT^2}{VS^2}$, & $KB^2 = \frac{\overline{AB^2 + BN^2} \times VT^2}{VS^2} - BN^2$, hoc est $BK^2 = \frac{AB^2 \times VT^2 + BN^2 \times \overline{VT^2 - VS^2}}{VS^2}$; ergo $KB^2, YN^2 :: \frac{AB^2 \times VT^2 + BN^2 \times \overline{VT^2 - VS^2}}{VS^2}, \frac{AB^2 \times VT^2 + BN^2 \times ST^2}{ST^2}$; nempe quia $VT^2 - VS^2 = ST^2$, erit $KB^2, YN^2 :: \frac{1}{VS^2}, \frac{1}{ST^2}$, & KB, YN :: ST, SV.

Exposita refractionis ratione per signa I, & R, erit $VT = I$, $VS = R$, $ST = \sqrt{II - RR}$, & KB, YN :: $\sqrt{II - RR}$, R.

Corollarium Primum.

Hinc si duo refracti radii MO, NQ (*Fig.* 53) oc-

occurrant axi AB in punctis I, & K, & ducantur rectæ YM, YN, erit KB, IB :: YN, YM. Nam est KB, YN :: ST, SV præcedentis figuræ; & similiter IB, YM :: ST, SV; ergo KB, YN :: IB, YM, & permutando KB, IB :: YN, YM.

Corollarium Secundum.

Hinc etiam si a puncto X, in quo conveniunt refracti, demittatur XP ad AB parallela, & huic occurrant in R, S protractæ MY, NY, erit NS æqualis MR. Nam quia est XP ad KB parallela, erit XS, SP :: KY, YB, & componendo XP, SP :: KB, YB: & permutando XP, KB :: SP, YB, hoc est :: SN, YN; & iterum permutando XP, SN :: KB, YN, hoc est (per Coroll. super.) :: IB, YM, seu :: XP, RM; igitur RM æqualis SN.

PROPOSITIO XXIX.

THEOREMA.

Sit in medio densiori radians punctum A (Fig. 54), *& in semicirculo* VST *sit diameter* VT *ad chordam* VS :: R, I. *Si fiat* YB, KB :: VT, TS, *& connectatur* YN, *erit* AB, YN :: TS, VS.

Est

Est (per Prop. xix.) $KN = \frac{AN \times VS}{TV}$, & ideo

$\overline{KB}^2 = \frac{\overline{AN}^2 \times \overline{VS}^2}{\overline{TV}^2} - \overline{BN}^2$; ergo (per hypothesim)

$\overline{YB}^2 = \frac{\overline{AN}^2 \times \overline{VS}^2 - \overline{BN}^2 \times \overline{VT}^2}{\overline{TS}^2}$, & $\overline{YN}^2 =$

$\frac{\overline{AN}^2 \times \overline{VS}^2 - \overline{BN}^2 \times \overline{VT}^2}{\overline{TS}^2} + \overline{BN}^2$; hoc est $\overline{YN}^2 =$

$\frac{\overline{AN}^2 \times \overline{VS}^2 - \overline{BN}^2 \times \overline{\overline{VS}^2 + \overline{TS}^2} + \overline{BN}^2 \times \overline{TS}^2}{\overline{TS}^2}$, nimirum

$\overline{YN}^2 = \frac{\overline{AN}^2 \times \overline{VS}^2 - \overline{BN}^2 \times \overline{VS}^2}{\overline{TS}^2}$; ergo $\overline{AB}^2$, $\overline{YN}^2$:

$\overline{AN}^2 - \overline{BN}^2$, $\overline{\overline{AN}^2 - \overline{BN}^2} \times \frac{\overline{VS}^2}{\overline{TS}^2}$, nempe $\overline{AB}^2$, $\overline{YN}^2$ ::

$\overline{TS}^2$, $\overline{VS}^2$, & AB, YN :: TS, VS; ideoque AB, YN :: $\sqrt{\overline{RR - II}}$, I.

Corollarium Primum.

Si duo refracti radii, MQ, NQ (*Fig. 55*) occurrant axi in punctis I, K, se vero decussent

 in

in puncto X, & ducatur YP per X parallela ad AB, sitque YP, XP :: VT, ST præcedentis figuræ, & per Y ducantur MYR, NYS; erit NS æqualis MR. Etenim propter parallelas AB, YP est SB, KB :: YP, XP, nempe :: VT, ST, atque ideo erit (per Proposit. præced.) AB, SN :: ST, SV. Item quia est RB, IB :: YP, XP :: VT, ST, erit AB, RM :: ST, SV; ergo erit AB, SN :: AB, RM, atque ideo SN æqualis MR.

Corollarium Secundum.

Et quia est SB, KB :: YP, XP; & similiter RB, IB :: YP, XP, erit etiam SB, RB :: KB, IB.

PROPOSITIO XXX.

PROBLEMA.

In recto angulo GPN (Fig. 56) *ducere per datum punctum* Y *rectam lineam* NG, *quæ datæ* CA *æqualis sit*.

Ductis a dato puncto Y ad GP, & PN normalibus YF, YB, sumatur in producta FY recta YO æqualis YF, sitque DB per Y ducta parallela ad FP: tum intra asymptotos BN, BD describatur per punctum O hyperbola HO*b*; deinde producta FP in V, ut sint æquales PF, PV,

PV, centro V radio datæ AC æquali, describatur circulus QH*b*D, & a punctis H, *b*, in quibus circulus hyperbolam secat, ducantur HN, *bn* normales ad PN; ac tandem a punctis N, *n* per Y ducantur NG, *ng*: harum quælibet erit datæ AC æqualis.

Ducatur VR ad PN parallela; producta HN in R, erit (per similitudinem triangulorum GFY, YBN) GF, FY :: YB, BN; rectangulum igitur GF x BN æquale erit rectangulo FY x YB; sed per hyperbolæ proprietatem etiam rectangulum BN x NH est æquale rectangulo BY x YO (seu FY x YB); igitur rectangulum supradictum GF x BN æquale rectangulo BN x NH: atque ideo æquales inter se GF, NH; igitur addendo pares FP, NR, æquales erunt GP, HR. Sunt autem & æquales PN, VR; ergo (ducta VH, quæ datæ AC ex constructione est æqualis) erit quadratum VH æquale quadratis VR (seu PN,) & HR (seu GP) simul sumptis; sed etiam quadratum GN æquale est quadratis PN, GP simul sumptis; ergo rectæ GN æqualis est VH, seu data AC. Idem dicas de recta *ng*.

Corollarium Primum.

Per punctum V (*Fig. 56*) describatur Hyperbola opposita KV*k*, & a punctis K, *k*, in quibus circulus hyperbolam secat, ducantur MKE, *mck* ad

M P *m* perpendiculares. Si per puncta Y, M (vel Y, *m*) agatur recta M L Y (vel *l m* Y) erit intercepta M L (vel *m l*) æqualis datæ A C. Nam facile demonstratur, ut supra, esse M K, F L æquales: quamobrem ab æqualibus M E, F P demptis æqualibus M K, F L, remanent K E, P L æquales inter se. Sunt autem & æquales M P, E V. Igitur, quoniam quadratum M L est æquale quadratis M P (seu E V;) & L P (seu K E) simul sumptis, quibus æquale est quadratum V K, erit recta M L æqualis V K, seu datæ A C. Quapropter si circulus oppositas hyperbolas in quatuor punctis H, *h*, K, *k* secet, quatuor erunt puncta N, *n*, M, *m*, ex quibus ductis per punctum datum Y rectis N Y G, *n* Y *g*, M L Y, *m l* Y erunt singulæ interceptæ N G, *n g*, M L, *m l* æquales eidem datæ A C. Primæ duæ inservient angulo F P B; & problemati præcipue satisfaciunt; tertia utere, si angulus datus sit M P L, & punctum Y extra eumdem angulum, quarta denique pro angulo V P B.

Corollarium Secundum.

Si circulus hyperbolam H O *b* non secet, duæ tantum lineæ quæstioni satisfacient in angulis B P V, M P L. Si vero tangat (*Fig. 57*), punctum N hac ratione inventum præbet lineam N G omnium in angulo H P B per Y ducibilium minimam. Id vero jam per se patet, cum sit

sit N G radio hujus circuli æqualis. Ut autem habeatur hujusmodi punctum N, positis iis, quæ supra, vertice B ad axem B D, parametro B Y describatur parabola Apolloniana B K S hyperbolam secans in K, & a puncto K ducatur K N ad B Y parallela, erit N punctum quæsitum. Sit K T hyperbolam tangens in K. Per proprietatem hyperbolæ erit N T æqualis N B, & per proprietatem parabolæ, erit rectangulum B Y × N K æquale quadrato ordinatæ B N; quare erit Y B, B N :: B N, seu N T, N K; anguli vero Y B N, K N T recti sunt; ergo (per Propos. 6 lib. 6 Eucl.) similia triangula Y B N, N T K; igitur angulus Y N B æqualis est angulo T K N. Est autem G H æqualis K N, quia æquales sunt G P, R K, & ducta V R ad P N parallela, est K R æqualis G P; ergo in triangulis G P N, K R V duo latera G P, P N duobus K R, R V æqualia sunt, & sunt anguli P, R recti; igitur angulus G, seu B Y N æqualis angulo R K V; duo ergo T K N, R K V simul, hoc est angulus T K V æqualis duobus simul Y N B, B Y N, nempe æqualis recto. Ergo K T est simul tangens circulum radio V K descriptum; ergo V K est omnium minima earum, quæ a puncto V ad hyperbolam duci possunt; igitur G N, quia semper est æqualis V K, erit omnium minima ducibilium per punctum Y.

Co-

Corollarium Tertium.

Et quoniam est, per similitudinem triangulorum GHY, YBN, est, inquam, YB, BN:: GH, HY, &, propter parabolam, est YB, BN:: BN, NK, seu æqualem GH, erunt YB, BN, GH, HY continue proportionales.

Corollarium Quartum.

Si vero datum punctum (*Fig.* 58) sit G, sitque positione data recta BY ad PG parallela, & in recto angulo GPN a puncto G ducenda sit recta GN ita, ut intercepta YN sit æqualis datæ AC; intra asymptotos PG, PN describatur hyperbola per punctum O, completo rectangulo GPBO, tum centro O intervallo datæ rectæ AC, circulus describatur HbZ, & ~~a puncto H, in quo circulus hyperbolam secat,~~ demittatur perpendicularis HN, & ducatur GYN; erit YN æqualis datæ AC. Fiat FY ad GO parallela. Est GF, FY:: GP, PN; quamobrem rectangulum GF x PN erit æquale rectangulo FY x GP, hoc est rectangulo PO. Sed (per hyperbolæ proprietatem) est etiam rectangulum idem PO æquale rectangulo PN x NH; ergo erit GF æqualis NH; ergo etiam YB æqualis RH; sed BN est æqualis OR, & anguli ad B, & R recti; igitur YN æqualis OH, æqualis datæ AC.

Si

Si vero ab alio puncto *b*, in quo circulus hyperbolam secat, ducatur *bn* ad GP parallela, & agatur recta G*n*X, eodem ratiocinio ostendes rectam *n*X esse æqualem datæ AC, quæ recta *n*X ad rem facit, si recta BX positione data sit extra angulum GPN.

Si circulus oppositam alteram hyperbolam aut secet, aut tangat, eadem dicentur, quæ in superioribus Corollariis dicta sunt.

Breviorem vero, elegantiorem sane ejusdem problematis solutionem habemus in sexta Lectionum Geometricarum Isaaci Barovv, quæ solutio hujusmodi est, ubi punctum Y sit extra angulum datum. Sit datus angulus quicumque GPN, punctum datum Y, intercepta NG (*Fig.* 59) a lateribus anguli æqualis esse debeat datæ AC.

Ducatur per punctum Y indefinita utrimque YL ad PN parallela, sitque LZ æqualis PL, & per Z traducta sit indefinita utrimque ZS similiter ad PN parallela, & YI parallela ad PZ. Intra asymptotos ZG, ZS describatur hyperbola per punctum Y transiens; tum centro Y, intervallo datæ AC æquali, circulus describatur hyperbolam secans in O; ducta YNOG dabit NG æqualem datæ AC. Nam (per proprietatem hyperbolæ) producta GY in S, est YS æqualis OG, & est etiam æqualis YN; ergo YN æqualis OG, atque ideo NG æqualis YO, æqualis datæ AC.

Quo-

Quoniam vero circulus hyperbolam secat in duobus punctis, duæ habentur hujusmodi lineæ æquales datæ AC. Immo vero quia tantæ magnitudinis data AC esse potest, ut circulus secet etiam inferiorem hyperbolam, vel eam tangat, unam tantummodo datæ AC æqualem dabit; quo in casu problematis solutiones esse poterunt aut duæ, aut tres, aut quatuor.

PROPOSITIO XXXI.

PROBLEMA.

A dato puncto A (Fig. 60) *prodiens radius est designandus, cujus refractus a superficie* EF *transeat per datum punctum* X.

Per puncta A, & X ducantur ad refringentem EF perpendiculares AB, XP, tum in casu medii rarioris in densius fiat AB quadratum, YB quadratum :: II — RR, II; ac pariter fiat II — RR, RR :: quadratum XP, quadratum rectæ cujusdam RC; ac per punctum Y ducatur in angulo XPF recta NG, quæ sit æqualis RC, idque per præcedentem propositionem fiat, si punctum X sit ultra A, aut per Corollarium quartum, si X sit inter AK, & F. Connectantur AN, XN; dico factum, nimirum XN esse incidentis radii AN refractum.

Producatur BY, quæ secet NX in K. Est XP, KB :: NP, NB :: NG, NY, & permutando XP, NG :: KB, NY; & quia est quadratum XP ad quadratum NG, seu ad quadratum lineæ RC :: II — RR, RR, erit quadratum KB, quadratum YN :: II — RR, RR; quamobrem (per Propos. XXVIII) erit NK ipsius AN refractus.

In secundo casu, nempe densioris medii in rarius, fiat RR — II, RR :: quadratum XP, quadratum YP; itemque RR — II, II :: quadratum AB, quadratum cujusdam RC, ac in angulo ABN (*Fig.* 61) per Y inscribatur recta NG æqualis RC, connectanturque AN, XN; dico factum.

Protracta XP secet AN in S. Est SP, YN :: AB, GN :: AB, RC, atque ideo SP quadratum, YN quadratum :: RR — II, II; ergo (per Propositionem XXIX) erit KN ipsius AN refractus.

Corollarium Primum.

Quoniam vero (per Propos. præced.) in angulo XPN duæ rectæ inscribi possunt æquales RC, duo erunt puncta N, nimirum duo incidentes radii, quorum refracti per datum punctum X transeant; si quidem punctum X sit ultra punctum A ad partes E in casu ex medio rariori in densius, vel infra punctum A ad partes F in altero casu medii densioris in rarius. Si vero pun-

punctum X in primo casu sit infra A ad partes F, vel ultra in secundo ad partes E, quia (per Corollarium quartum ejusd. Propos.) unica tantum linea duci potest in angulo XPN, quæ sit æqualis RC, unicum punctum N, seu unicus incidens radius quæstioni satisfacit.

Corollarium Secundum.

Erit autem problema impossibile in primo casu, existente puncto X ultra A, si RC (*Fig.* 60) sit minor KV (*Fig.* 57), quæ ducta est a parabolæ puncto intersectionis cum hyperbola (per Coroll. secund. Propos. XXX). Sin autem punctum X sit infra A, numquam erit impossibile Problema (per Corollarium quartum ejusdem Propositionis.)

In secundo casu erit impossibile Problema, si existente puncto X infra A, sit RC (*Fig.* 60) minor eadem KV (*Fig.* 57). Sin autem punctum X sit ultra A, numquam erit impossibile Problema.

Corollarium Tertium.

Ceterum nullo prorsus negotio solvitur Problema, si datum punctum X sit in axe, nempe in ipsa AB producta, si opus est; tunc enim Problema planum est; nam centro Y, intervallo æquali datæ RC descripto circulo, qui secat refringentem EF, in aliquo puncto N, & ducta NX,

NX, erit hæc refractus radius incidentis AN.

PROPOSITIO XXXII.

THEOREMA.

Sumpto, ut supra factum est, puncto Y (Fig 62) *ut sit quadratum* AB, *quadratum* YB::II — RR, II, *sit alicujus incidentis* AN *ex rariori medio in densius refractus radius* NK, *tum continuata ratione* YB *ad* BN, *sit ad has quarta proportionalis* BP, *& per punctum* P *recta* PZ *ad* AB *parallela refracto radio* NK *occurrens in* Z: *dico refractum alium nullum per* Z *transire.*

Transeat, si fieri potest, alius quivis RZ, & per Y ducantur in angulo ZPN rectæ NYG, RYS. Erit (per Coroll. secundum Prop. XXVIII) NG æqualis RS; sed (per Coroll. tertium Propos. XXX) est NG omnium minima ducibilium in angulo ZPN per punctum Y; igitur erit NG & æqualis, & minor RS, quod est impossibile; ergo ec.

PROPOSITIO XXXIII.

THEOREMA.

Sit ex densiori medio in rarius (Fig. 63) *incidentis alicujus radii* AN *refractus* NK, *& fiat* *quadratum* KB, *quadratum* GB::RR—II, RR; *tum ducta* GN, *ad ipsas* NG, GB *sumatur tertia proportionalis* V, *& fiat* NG, V::BN, NP, *& per punctum* P *ducatur* PY *ad* BA *parallela, refractum* NK *decussans in* Z; *dico nullum alium refractum per punctum* Z *transire*.

Transeat, si fieri potest, alius ZR, & per Y trajiciatur RYS; & quoniam est quadratum ZP, quadratum YP:: quadratum KB, quadratum GB, nempe:: RR — II, RR, erit (per Corollar. primum Propos. XXIX) RS æqualis NG. At etiam, quia est quadratum NG, quadratum GB::NG, V, hoc est:: BN, NP, erit, dividendo, NB quadratum, quadratum GB:: BP, NP, hoc est quadratum NP, quadratum PY::BP, NP. Hoc posito probatu facile est BP esse quartam proportionalem in ratione YP, PN. Nam quia est quadratum PY, quadratum NP::NP, BP, erit PY, NP::NP ad mediam inter NP, PB, quæ sit, exemp. grat. T. Erit ergo PY, NP::NP, T; & NP, T::T, BP; quamobrem BP quarta proportionalis in ratione YP, PN; ergo (per Corollar. tertium propos. XXX) NG omnium minima ducibilium per Y in angulo ABN; ergo erit & minor, & æqualis RS, quod est absurdum; ergo ec.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

THEOREMA.

Sumpto, ut supra in Propos. XXXI *factum est, puncto* Y, *si refractum radium intersecet alius quilibet* (Fig. 64) MX *ad rectiorem pertinens incidentem e rariori medio in densius, hoc est ut incidentiæ punctum* M *inter* B, *&* N *jaceat, intersectio* X *propinquior erit ad perpendiculum* KB, *quam sit solitarium punctum* Z *in Propositione* XXXII *determinatum*.

A puncto X demittatur perpendicularis XQ, & per Y trajiciantur NYg, MYH. Erit (per Coroll. secundum Propos. XXVIII) MH æqualis Ng; quare earum minima, quæ per Y in angulo XQN duci possunt, inter puncta M, & N cadet, ut ex Coroll. quarto Propos. XXX facile infertur. Cadat igitur in L; ergo cum sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN (per Propos. XXXII), & BQ sit quarta proportionalis in ratione YB ad BL (per Coroll. tert. Propos. XXX) erit PB major QB, ideoque recta XQ rectas ZP, AB interjacet.

Iisdem positis, ac sumptis punctis G, & Y, ut in præcedenti Propositione factum est, veniat radius a densiori medio in rarius. Per X (*Fig.* 65) ducatur QXg, & per g trajiciantur rectæ MgH, NgG. Ergo cum sit QX, Qg:: BK, BG, BG, & quadratum QX, quadratum Qg:: quadratum BK, Quadratum BG::RR—II, RR, erit (per Coroll. prim. Propos. xxix) HM æqualis GN; ergo omnium minima per punctum g in angulo ABN ducibilium inter puncta M, & N cadet, & cadat in L. Erit itaque QB quarta proportionalis in ratione gQ ad QL, & est gQ ad QL in majori ratione, quam gQ ad QN, seu quam YP ad PN; ergo etiam, simplicibus rationibus triplicatis substituendo, erit gQ ad QB in majori ratione quam PY ad PB, & loco gQ, YP sumptis proportionalibus QN, PN, erit QN ad QB in majori ratione quam PN ad PB, & componendo, BN ad BQ in majori ratione quam BN ad BP. Ergo BP major BQ; ergo recta XQ ipsas AB, ZP interjacet.

Corollarium.

Constat autem ex hoc theoremate obliquiorum incidentium refractos ultra punctum Z ipsam KN intersecare, si quidem ex rariori medio in densius incidant radii; contra vero eamdem KN intersecare infra punctum Z ad partes N, ubi manent radii a medio densiori. Hinc porro rursus apparet non nisi binos refractos in idem punctum convenire.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

LEMMA.

Si sint tres lineæ (Fig. 66, AB, AC, AD, *quarum excessus* BC, CD *sint æquales, erit excessus cubi ex* AD *supra cubum* AC *major excessu cubi ex* AC *supra cubum ex* AB.

Fiant quadrata AH, AO, AP. Excessus quadrati AP supra quadratum AO est gnomon IOD, & quadrati AO supra quadratum AH est gnomon FHC; sed gnomon IOD est major gnomone FHC; ergo multo magis solidum in basi IOD, & altitudine AD est majus solido in basi FHC, & altitudine AC; sunt autem hæc solida differentiæ cuborum; ergo ec.

PROPOSITIO XXXVI.

THEOREMA.

Iisdem positis, incidentium radiorum ex rariori medio in densius refracti (Fig. 67) *cum* KN *concurrentes circa punctum* Z *conglomerantur maxime.*

Sumantur in EF æquales partes NS, ST, & sit BP quarta proportionalis in ratione YB ad BN; BQ quarta proportionalis in ratione YB ad BS; BR quarta proportionalis in ratione YB ad BT, & a punctis P, Q, R erectæ perpenpendiculares ipsam NKZ secent in Z, X, V. Ex ostensis Propositione XXXIV patet, omnium spatio NS incidentium radiorum refractos cum NK concurrere intra Z, & X; nec non omnes ipsi ST incidentium refractos intra X, & V cum eadem NK concurrere. Porro quia BP est quarta proportionalis ipsarum YB, BN ex constructione, & BQ quarta ipsarum YB, BS, erit BP, YB :: cubus BN, cubum YB, & YB, BQ :: cubus YB, cubum BS; ergo ex æquo erit BP, BQ :: cubus BN, cubum BS; & similiter erit BQ, BR :: cubus BS, cubum BT; ergo (per Lemma superius) erit RQ major quam QP, atque ideo VX major XZ. Igitur radii refracti circa punctum Z spissius ipsam NK productam decussabunt.

PROPOSITIO XXXVII.

THEOREMA.

Iisdem positis, quæ in Propos. XXXIII, *incidentium radiorum* (Fig. 68) *ex densiori medio in rarius refracti cum ZN concurrentes circa punctum Z conglomerantur maxime.*

Sumantur in EF æquales partes NS, ST, & sit BP quarta proportionalis in ratione YP ad PN; & BQ quarta proportionalis in ratione YP ad PS; BR quarta proportionalis in ratione YP ad

ad PT, & a punctis B, R, Q erectæ perpendiculares ipsam NXZ secent in Z, V, X. Ex ostensis in secunda parte Proposition. XXXIV patet, omnium spatio NS incidentium radiorum refractos cum ZV concurrere intra Z, & V; nec non omnium in ST incidentium refractos intra V, & X. Porro quia BP est quarta proportionalis ipsarum YP, PN, & BQ ipsarum YP, PS; BR vero ipsarum YP, PT; erit BP, BQ :: cubus PN, cubum PS; & BQ, BR :: cubus PS, cubum PT; ergo (per Lemma superius) differentia inter BP, BQ, hoc est QP, major erit differentia inter BQ, BR, hoc est RQ, & sic porro; est igitur etiam XV major VZ; ergo radii refracti circa punctum Z spissius ipsam NZ decussabunt.

Corollarium.

Itaque si oculus (*Fig. 69*) ut libet constitutus, exemp. grat. in O, quod punctum sit pupillæ centrum, & CD diameter perpendicularis quidem ad objecti A refractum radium NK, qui sit axis opticus, seu principalis refractus, erit Z objecti A imaginis locus, seu videbitur objectum ad punctum Z superioribus Propositionibus determinatum. Nam cum CM, DR sint extremi radii, qui oculum ingrediantur, quique producti principalem refractum secant in X, & V, profecto neque ultra V, nec infra X videbitur

bitur objectum, quod illius refractorum radiorum hujusmodi nullus in oculum migret. Igitur intra X, & V erit imago potissimum, ubi confertiores radii sunt, axique optico propiores, videlicet in Z, uti demonstratum est. Huc autem accedit spatium VX propter pupillæ angustiam satis exiguum esse, ut proinde in Z imago esse videatur.

PROPOSITIO XXXVIII.

PROBLEMA.

Ad incidentem AB (Fig. 70) *in planam superficiem* EF, *cujus refractus* BD, *sit infinite proximus incidens alter* A*b*; *invenire punctum* O, *in quo hujus refractus* *b*O *priorem* DB *productum secet*.

A puncto E ducantur EH normalis ad AB, & EL normalis ad BD. Per punctum H transeat MHN parallela ad verticalem AE, & fiat EN, NL::BD, DO; erit O quæsitum punctum. Centro O ducantur arcus BG, D*r*, & centro A arcus BI, qui arcus, quoniam sunt infinitesimi, haberi poterunt ut rectæ lineæ. Quia (per constructionem) est EN, NL::BD, DO, erit etiam invertendo, & componendo, LN, LE::DO, OB::D*r*, BG; sed est etiam LN, LE::LM, LD; ergo LM, LD::D*r*, BG.

BG. Triangula porro ELD, BG*b* ut similia assumi possunt; ideoque LD, LE::BG, *b*G; ergo ex æquo LM, LE::D*r*, *b*G; sed etiam propter triangula similia D*dr*, BLE, est *dr*, D*r*: LE, LB; ergo ex æquo perturbate erit *dr*, *b*G:: LM, LB, & componendo, *dr* cum *b*G, *b*G:: BM, LB. Quoniam vero sunt similia triangula B*b*G, BEL; B*b*I, BEH, erit *b*G, B*b*::BL, BE, & B*b*, *b*I::BE, BH, ideoque *b*G, *b*I:: BL, BH; ergo ex æquo D*r*, *b*I::BM, BH, & etiam *b*I, *b*G cum *dr*::BA, BD, hoc est A*b*—AB, *bd*—BD::BA, BD, & alternando, ac componendo A*b*, AB::*bd*, BD, seu A*b*, *bd*::AB, BD::R, I; ergo (per Prop. LIX) erit *bd*O incidentis A*b* refractus.

LECTIO SEPTIMA.

A Plana superficie conferamus jam nos ad sphæricam, & ea contemplemur, quæ radiis accidunt in illam incidentibus, cui rei Lemma sequens præmitto.

PROPOSITIO XXXIX.

LEMMA.

Incidentium in circulum radiorum obliquior est, qui magis a centro distat.

Incidant (*Fig.* 71) in circulum NRP radii QR, MN, qui producti pertingant ad S, & P. A punctis N, R, S, P ducantur NC, RC, SC, PC ad centrum. Angulus RCS (per hypothesim) minor est angulo NCP; ergo reliqui simul CRS, CSR reliquis simul CNP, CPN majores sunt; est autem angulus CRS æqualis angulo CSR, & CNP æqualis CPN; ergo CRS major CNP; ergo & angulus ad verticem GRQ major angulo ad verticem HNM, qui sunt anguli incidentiæ.

Porro (*Fig.* 72) angulus PRC, quia majori arcui insistit, major est angulo PNC; ergo & angulus ad verticem GRQ major est angulo ad verticem HNM.

PRO-

PROPOSITIO XL.

PROBLEMA.

Dato cuilibet in circulum incidenti radio reflexum assignare.

Pluribus modis id fieri potest, & primo sit incidens quilibet MN (*Fig.* 73), qui productus secet circulum in P, & sumatur arcus NV æqualis NP, ex V per N ducta recta VNH, erit NH reflexus radius incidentis MN. Nam ducta diametro NCX, manifestum est angulum XNV æqualem esse angulo XNP; ergo & anguli ad verticem æquales RNH, RNM.

Secundo. Sumpto in NM quovis puncto M, centro C per M circulus describatur MQH. Similiter centro N per M describatur circulus MRH priorem secans in H, ducta ex H per N recta HNV erit reflexus radius incidentis MN.

Ductis enim rectis CM, CH, sunt triangula CNM, CNH sibi mutuo æquilatera (per constructionem) ideoque angulus CNM æqualis angulo CNH; ergo & reliquus MNQ ad duos rectos reliquo HNQ æqualis.

Tertio. A quovis puncto M incidentis radii MN in productam CN ducatur normalis MGH, & sumatur GH æqualis GM, juncta NH erit quæsitus reflexus. Erit enim angulus GNM æqualis angulo GNH.

Hoc

Hoc totum generatim docuimus Propositione III, nunc autem speciatim pro circulo didicisse non pœnitebit.

PROPOSITIO XLI.

THEOREMA.

Incidat in circuli sive convexam (Fig. 74) *sive cavam* (Fig. 75) *peripheriam radius quilibet* MN, *cui parallela ducatur diameter* BD, *&* *bifariam secto radio* BC *in* Z, *ad ipsum sit normalis indefinita* ZY, *ac juncta* CN, *quæ in* V *secet* ZY, *sumatur* CK *æqualis* CV, *ducaturque* KN; *erit hæc producta quidem ad partes* R *in Fig.* 74 *incidentis radii* MN *reflexus*.

Jungatur CP, & ad CB sit normalis NQ: erit CZ, CV, seu CK::CQ, CN, & duplicando antecedentes, erit CB, seu CN, CK:: NP, CN; est porro angulus KCN angulo CNP æqualis; ergo triangula KNC, NCP similia: quamobrem, quia est isosceles triangulum CNP, erit isosceles & triangulum CKN, & ideo CK æqualis NK, atque ideo angulus KCN, hoc est CNP æqualis angulo CNK, vel ENR, aut ENS (*Fig.* 75) æqualis angulo ENR, & radius KNR incidentis MN reflexus.

Co-

Corollarium Primum.

Ex hujusmodi constructione jam satis facile patet dimidium radii, videlicet punctum Z esse terminum citra, vel ultra quem ad centri C partes reflexus nullus incidentium ad MN parallelorum semidiametrum secat. Etenim nisi radius incidens sit perpendicularis, velut AB (quo in casu reflexus in se ipsum regredietur), erit semper CV, atque ideo CK major CZ.

Corollarium Secundum.

Est itaque CK æqualis NK, & præterea PN, seu dupla ipsius CQ, CN, CK erunt in continua geometrica proportione.

Corollarium Tertium.

Ducta tangente BT, & producta CN in E, quia est CB dupla CZ, atque ideo CE dupla CV, erit & dupla CK. Igitur CE æqualis duplæ CZ cum dupla ZK, nempe æqualis CB cum dupla ZK, & ablatis æqualibus CN, CB, erit NE æqualis duplæ ZK.

Corollarium Quartum.

Radii ad F incidentis reflexus per punctum B transibit, ut patet. Porro arcus BF recta ZF terminatus est graduum sexaginta, hujus enim arcus chorda est latus Exagoni circulo inscripti;

quam-

quamobrem incidens radius ad distantiam sexaginta graduum a vertice B, habebit reflexum per verticem ipsum transeuntem. Reflexi igitur omnes incidentium parallelorum intra BF secabunt axem intra B, & Z; incidentium autem parallelorum extra BF reflexi secabunt axem extra circulum productum.

Corollarium Quintum.

Incidant in circulum ad easdem partes axis duo item paralleli radii MN, QR (*Fig.* 76, 77) eorum reflexi se invicem intersecabunt in puncto aliquo X prius, quam ad axem perveniant. Ductis enim CN, CR, est CO major CV, ideoque CL major CK; quapropter necesse erit ut NK, RL se decussent antequam diametrum attingant. Reflexi itaque NG, RH incidentium in convexam circuli peripheriam extra circulum divergunt; ideoque uno plures numquam in oculi centrum ingredi poterunt, & ideo speculum circulare convexum unicam eminus radiantis puncti imaginem referet.

Corollarium Sextum.

Et quia (per Corollar. secundum) est CK æqualis KN; & similiter CL æqualis LR, erit angulus BKX duplus anguli BCN, & angulus BLR duplus anguli BCR; sed angulus BLR æquatur duobus simul LXK, LKX; ergo duplus

plus BCR æquatur angulo LXK cum duplo BCN, & ablato communi duplo BCN, erit angulus LXK, seu NXR æqualis duplo NCR.

PROPOSITIO XLII.

LEMMA.

In triangulo quovis ABC *si recta* AD *bifariam secet angulum* BAC, *erit* AB *cum* AC *major dupla* AD. (Fig. 78).

Si triangulum sit iscosceles, res est per se manifesta. Unum igitur quodvis latus AC sit reliquo majus, & centro A per B describatur arcus BP, cujus chorda BP, sitque PM ad AD parallela. Erit (per Propos. 3 lib. 6 Eucl.) BI æqualis IP; ergo PM dupla ID; est autem PC major quam PM, & AP, vel AB major quam AI; ergo AB cum AC major quam dupla AD.

PROPOSITIO XLIII.

THEOREMA.

Quo paralleli radii rectius, seu propinquius axi incidunt in circulum, eo reflexorum concursus cum axe sibi sunt viciniores (Fig. 79, 80).

Sumantur pares arcus NR, RX, sitque incidentium MN, QR, VX refracti KN, RL, XP; dico fore PL majorem quam LK.

Ducantur CN, CR, CX a centro C; quæ occurrant rectæ ZY in punctis I, O, T. Erit (per Lemma superius) CI cum CT major dupla CO, hoc est (per Propos. XLI) CP cum CK major dupla CL, & subducta hinc inde CL, erit LP cum CK major CL, & iterum subducta CK, erit LP major LK.

Scholion.

Quoniam (*Fig.* 79, 80) radiantis objecti, & longe remoti, ut proinde radii veluti paralleli assumi possint, incidentes radii axi propinquiores reflexos habent in axe magis constipatos circa punctum Z, erit ibi maxima reflexa lux speculi concavi (*Fig.* 80) eritque propterea punctum Z speculi focus, ubi nempe, exposito ad solem speculo, si affabre sit perpolitum, ignis accenditur. Et si in foco collocatum sit lumen, a speculo reflectentur radii plures paralleli, & utique ad insignem distantiam; oculo itaque uspiam in axe constituto, veluti in A, imago objecti videbitur per reflexionem speculi in Z. Nam sit A pupillæ centrum, AKB axis opticus, EF oculi diameter in circuli plano sita, hujus autem extrema permeent incidentium MN, GD radiorum reflexi DKF, NKE: quoniam hi sunt ex-

extremi radii, qui oculum subeant, & oculi pupilla parva, jam non nisi reflexi radii ab exigua parte circuli ND oculum ingredi poterunt; cumque ii ipsi circa Z sint confertiores, atque ideo maxime validi ad excitandam visionem, ibi videbitur imago. At si oculus statuatur uspiam in axe intra spatium ZB (*Fig.* 80) visio habebitur aut admodum confusa, aut nulla.

PROPOSITIO XLIV.

THEOREMA.

Majoris sphæræ portio vehementius urit, & objectum clarius, & distinctius repræsentat, quam portio sphæræ minoris æqualem habens latitudinem, seu subtensam majoris sphæræ.

Insistant (*Fig.* 81) super eamdem subtensam NV imparia circulorum segmenta NBV, N*b*V, quorum centra C, *c* in axe AD. Constat majoris circuli segmentum, & illius centrum infra minoris segmentum, & hujus centrum jacere. Bifariam secentur semidiametri CB, *cb* in Z, *z*, & ducantur tangentes BT, *bt*, quibus occurrant in punctis E, *e* ductæ CNE, *c*N*e*; incidentis radii PN ad axem AD paralleli sit NK reflexus a segmento NBV, reflexus vero a segmento N*b*V sit NO. Est autem N*e* major NE, hoc est (per Coroll. tert. Prop. XII) dupla ZO major dupla ZK, &

 ZO

ZO major ZK. At (per Coroll. prim. Prop. XLI) omnium radiorum in portionem N*b*V illabentium refracti in spatio ZO continentur, illabentium vero in portionem NBV refracti in spatio ZK. Igitur majoris sphæræ portio eamdem illabentium lucem intra brevius spatium cogit, & ideo erit & vis major, & objectum illustrius.

Hæc autem de oculo in axe posito satis esse videntur; dispiciendum porro est quid oculo accidat extra axem collocato, radiante similiter puncto ab infinita distantia quod ad sensum, nimirum radios proiciente veluti parallelos.

PROPOSITIO XLV.

PROBLEMA.

Dato quovis reflectente circulo BNQ (Fig. 82) *cujus centrum* C, *& data positione recta* CB *per centrum* C *transeunte, huic designandus est parallelus incidens radius, cujus reflexus per datum punctum transeat.*

Si datum punctum sit K in ipsa BC, centro K, intervallo KC describatur circulus reflectenti occurrens in N, & ducatur NP ad CB parallela, erit, juncta NK, reflexus radius incidentis PN. Est enim angulus KNC æqualis angulo KCN, & propter parallelas est KCN æqualis CNP; ergo æquales CNP, CNK; ergo ec.

Si

Si datum punctum K sit infra Z, ubi bifariam secta est CB, problema erit impossibile; circulus enim hac ratione descriptus reflectentem QNB nuspiam secabit; itaque nullus incidens dari potest, cujus reflexus secet CB infra Z; id quod similiter vidimus Coroll. primo Prop. XLI.

Si punctum K sit in Z, incidens erit ipsa CB.

Si punctum K sit in ipsa reflectentis peripheria, problema solidum est; solvetur autem facile anguli, seu arcus trisectione. Quamobrem in circuli peripheria (*Fig.* 83) cujus centrum C, datum punctum sit K, & ducatur KP ad BQ parallela, & jungantur CK, CP, sitque CH ad diametrum BQ, atque ideo ad KP normalis; hæc secabit arcum KHP bifariam in H. Secta CK bifariam in A, & ducta MAF parallela ad HC, sit DF æqualis DA, & FR parallela ad DC. Tum intra asymptotos FA, FR describatur per punctum C hyperbola CG, per G transeat perpendicularis MGN ad CH, ac tandem ducatur CG: dico primo angulum GCN esse tertiam partem anguli KCN: dico secundo radium NG esse quæsitum incidentem, cujus reflexus cadit in K.

Jungatur RM secans CD in E. Per hyperbolæ proprietatem est rectangulum FD x DC æquale rectangulo FM x MG; igitur est FD, FM :: MG, DC; sed FD, FM, hoc est RC, RN :: CE, MN (seu DC); igitur MG,

DC

DC::CE, DC; ergo æquales sunt & parallelæ MG, CE, atque ideo æquales & parallelæ CG, EM, nempe æquales CK, EM. Hoc posito, bifariam secetur EM in I, & ducta ID, quia angulus MDE rectus est, circulus centro I, radio IM descriptus transibit per D: quapropter erunt æquales IM, ID, IE, & EM dupla ID; est vero & dupla CA, seu RD; igitur DI, DR æquales, & angulus DRI æqualis angulo DIR; angulus autem DIR, vel æqualis DRI est duplus anguli DMR, seu MRC; & angulus DRI æquatur angulo KCG, angulus MRC æquatur angulo GCN; ergo angulus KCG duplus est anguli GCN; quod erat primum.

Producatur GN in T; erit arcus GHT tertia pars arcus KHP. Ducantur KG, KT. Angulus CGK æquatur angulo CGT; erit ergo GK reflexus radius incidentis TG (per legem secundam). Et quia angulus GTK æquatur angulo TKP, erunt GT, PK, atque adeo GT, QB parallelæ; igitur incidentis TG ad BQ paralleli, reflexus GK per K transibit; quod erat secundum.

PROPOSITIO XLVI.

Lemma.

In circuli peripheria (Fig. 84) *dato quovis puncto* O, *rectam* OD *ducere ita, ut intercepta* BD *inter diametrum, & peripheriam, sit æqualis datæ f.*

Ad polum O, intervallo GN datæ rectæ *f* æquali Conchoides superior DMN, & inferior ROS describantur, quarum regula, seu axis sit circuli diameter EA utrimque indefinite producta. Si a punctis, in quibus conchoides circulum secant, rectæ ducantur ad datum punctum O, quælibet intercepta DB, MH, PQ, IV erit datæ *f* æqualis. Id autem ex ipsa essentiali proprietate, seu accidente curvæ clarius est, quam ut indigeat demonstrari. Illud tamen modo est animadvertendum, quod si fuerit data *f*, seu GN non major GO, conchois superior, & inferior in quatuor punctis circulum secabunt, & quatuor invenientur *f* æquales. Si vero data *f* sit major quam GO, talis esse potest, ut superior conchois DMN circulum aut in uno puncto tangat, aut in duobus secet, aut neque tangat, neque secet; inferior conchois ROS secabit tamen circulum semper in duobus punctis. Porro si punctum datum O hujusmodi sit, ut AO sit quadrans circuli, sumpta *f* æquali semidiametro circuli, conchois superior circulum tanget; si *f* sit major semidiametro, neque tanget, neque secabit; si sit minor, secabit duobus punctis. Inferior vero, quæcumque tandem sit data *f*, duo-

duobus punctis circulum secabit. Plures ergo, aut pauciores solutiones erunt problematis, habita ratione magnitudinis lineæ *f*, & positionis puncti O.

PROPOSITIO XLVII.

PROBLEMA.

Hisce positis, sit nunc datum in circulo extra diametrum, & peripheriam punctum X (Fig. 85), *& oporteat punctum* N *in reflectente peripheria invenire, in quod incidens radius* RN *ad* CB *parallelus habeat reflexum per datum punctum* X *transeuntem*.

Centro X per C circulus describatur CGLF, & ducatur GXF ad BC parallela; tum per superius Lemma a puncto C ducatur CNL ita, ut HL sit æqualis semidiametro circuli reflectentis, quæ illum secet in N, ducta NXK erit radius reflexus incidentis RN ad CB paralleli.

Connectantur XC, XL. Quoniam CB, seu CN est æqualis HL (per construct.) erit NL æqualis CH; porro est CX æqualis LX, ideoque triangulum CLX isosceles, & æquales anguli XCL, XLC; quamobrem triangula CXH, LXN æqualia, & similia; ergo æquales XN, XH, & æquales anguli XNH, XHN. Igitur quia propter parallelas XF, NR sunt æquales

les anguli XHN, RNH, erunt æquales etiam anguli RNH, XNH; ideoque NX reflexus radius incidentis RN.

Duo igitur, aut tria, aut quatuor ad summum hujusmodi puncta inveniri possunt in circuli reflectentis peripheria, prout duæ, aut tres, aut quatuor rectæ satisfacere possunt quæstioni superioris Lemmatis. Notandum vero est, ubi quatuor sint solutionis puncta, duo semper esse ad unam diametri BP partem, duo ad alteram.

PROPOSITIO XLVIII.

THEOREMA.

Si duorum ad easdem axis partes incidentium parallelorum (Fig. 86) SR, PN *reflexi sint* RO, NQ, *erit arcus* RN, *vel* PS *subtriplus arcus* OQ.

Concurrant dicti reflexi in X, & ducatur RQ. Angulus OXQ, seu NXR (per Coroll. sext. Propos. XLI) est duplus anguli ad centrum C insistentis arcui RN; hic autem duplus anguli NQR; ergo NXR quadruplus anguli NQR; est porro æqualis duobus simul XQR, & XRQ; ergo XRQ, seu ORQ triplus anguli NQR, & arcus OQ triplus arcus NR.

Secent NQ reflexi RT, LV in punctis X, Y, & connectantur LQ, RQ, & ducatur LH, ut sit angulus QLH æqualis angulo HQL, & ducantur rectæ RH, & RY. Est RH major quam LH: ideoque quam HQ; quamobrem angulus HQR major est angulo HRQ, & proinde angulus NHR minor duplo angulo NQR. Similiter YR major est quam YL, atque ideo major, quam YH: etenim in præcedenti Propositione demonstratæ sunt æquales YL, YH; ideoque angulus NYR minor duplo angulo YHR; quare multo minor est angulus NYR quadruplo NQR; est autem NXR quadruplus NQR (ut vidimus Propos. XLVIII); ergo angulus NXR major angulo NYR; ergo punctum Y cadet propius ad Z, quam X.

Ad alteras puncti N versus B partes similis erit demonstratio. Nam (*Fig.* 88) eadem facta constructione, erit in hoc casu RH minor quam LH; ideoque quam HQ; quamobrem angulus HQR minor est angulo HRQ, & proinde angulus NHR major duplo angulo NQR. Similiter YR minor est quam YL, atque ideo minor quam YH, ideoque angulus RYN major duplo angulo YHR; quare angulus NYR multo major quadruplo angulo NQR. Est autem NXR quadruplus NQR; ergo angulus NYR major angulo NXR; ergo punctum Y cadet propius ad Z quam X.

Corol-

Corollarium.

Hinc patet ad easdem partes, & infra NQ incidentium reflexos se prius, quam ipsam NQ, decussare (*Fig.* 87). Contra vero incidentium intra N, & B (*Fig.* 88) reflexos decussare NQ prius, quam se invicem. Quinimmo & constat ad easdem axis NQ partes reflexos duobus plures in uno puncto non concurrere.

Scholion.

Ex his autem colligi facile potest, circa punctum Z ipsam NQ prænotato modo quadrisecans radiantis imaginem conspici comparate ad oculum, cujus centrum O sit uspiam in recta NQ constitutum (*Fig.* 89). Sit enim pupillæ diameter EF, & per hujus terminos transeant radiorum ML, SR reflexi LE, RF, quorum ille secet ipsam NQ in Y, hic autem in X. Quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso RS, & rectiorum ipso LM reflexus nullus oculum ingredietur, necessario intra spatium YX versabitur imago. Quin etiam cum radiorum arcui LR incidentium, illi, qui, prope punctum Z reflectuntur, axi NQ propius adjacentes perpendicularius, ut ita dicam, oculum feriant, idque spissius, ut ex analogia par est æstimare per ea, quæ sæpius sunt dicta, ab eo videbuntur sensum afficientes promanare, & in ipso imago consistet.

ſiſtet. Accedit eodem, quod ob anguſtiam pupillæ ſpatium XY ſatis modicum ſit, & puncti modum vix excedere videatur.

Subdo, ſi ſtatuatur oculi centrum uſpiam in ZN, iſque verſus punctum N obvertatur, objectum confuſius apparere, quoniam reflexi radii ad oculum convergentes appellant, atque ideo imago Z in hoc caſu pone ſenſorium conſiſteret.

L E-

LECTIO OCTAVA.

SAtis, ut arbitror, ea contemplati ſumus, quæ radiis obveniunt parallelis, nunc autem de puncto aliquo diſſeramus radios projicienti ſenſibiliter divergentes, & quidem primo in ſuperficiem utique ſphæricam, ſed convexam, in quam rem ſequitur.

PROPOSITIO LII.

THEOREMA.

In convexam circuli peripheriam BNP (Fig. 90) *cujus centrum* C, *a puncto* A, *radius quilibet* ANP *incidat, cujus reflexus ſit* NG; *is productus occurret axi* AC; *& habebitur reflexus, ſi ſumatur arcus* NS *æqualis arcui* NP; *ſive ſi per punctum* N *circulo inſcribatur chordæ* NP *æqualis chorda* NS.

Nam ducta CNO, patet GN productam ſecare angulum ANC, atque ideo baſim AC trianguli ANC, puta in K; quod erat primum. Ducatur diameter NCR; erunt ergo æquales inter ſe arcus RP, RS, nempe anguli SNR, PNR, & horum, qui ad verticem ſunt ONG, ONA; quod erat ſecundum.

P R O-

PROPOSITIO LIII.

THEOREMA.

Incidentis cujusvis radii AN (Fig. 90) *erit reflexus* NK *hujusmodi, ut sit semper* AC, AN::KC, KN.

Ducatur KH ad CN parallela; sunt igitur æquales anguli KHN, CNP, CNK, NKH, quoniam æquales sunt incidentiæ ANO, & reflexionis GNO; itaque æquales sunt NH, NK. At propter parallelas CN, KH, est AC, AN ::KC, NH; igitur erit etiam AC, AN::KC, NK.

Corollarium Primum.

Et quoniam æquales sunt NH, NK, & similia triangula HNK, NCP sunt enim isoscelia, & angulus CNP æqualis angulo KHN, erit HK, HN::NP, CN.

Corollarium Secundum.

Erit etiam (*Fig.* 90) AC, CK:: $\overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$, $\overline{CN}^2$. Nam per Corollar. primum est PN, CN ::HK, HN: igitur multiplicando per rationem NA ad CN, erit PN × NA, $\overline{CN}^2$::HK × AN, HN × NC. Sed, quoniam AN, HN::AC,

KC, & HK, NC::AK, AC, erit HK × AN, HN × NC::AC × AK, KC × AC::AK, KC; seu AK, KC::PN × NA, $\overline{CN}^2$; & componendo, AC, KC::PN × NA + $\overline{CN}^2$, $\overline{CN}^2$. Insuper, ducta perpendiculari CV ad NP, erit (per Propos. 12 lib. 2 Eucl.) $\overline{CA}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NA}^2 +$ 2 VN × NA, seu $\overline{CA}^2 - \overline{NA}^2 =$ PN × $\overline{NA}$ + $\overline{CN}^2$: ergo AC, KC:: $\overline{CA}^2 - \overline{NA}^2$, $\overline{CN}^2$.

Corollarium Tertium.

Si duorum quorumvis incidentium AN, AM (*Fig.* 94) reflexi NR, MP intersecent axem punctis K, L: erit CL, CK:: $\overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{AM}^2$. Nam per Corollar. secund. est AC, KC :: $\overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$, $\overline{CB}^2$; & CL, AC:: $\overline{CB}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{AM}^2$; igitur ex æquo perturbate erit CL, CK :: $\overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{AM}^2$.

Corollarium Quartum.

Per Corollarium antecedens est CL, CK:: $\overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{AM}^2$; sed AN minor est AM; ergo CL major CK. Quamobrem si duo sint incidentes radii AN, AM, obliquioris incidencidentis A M reflexus P M productus in L axem decussabit in L propius ad punctum B, quam sit K punctum reflexi R N K ad rectiorem incidentem A N spectans.

Corollarium Quintum.

Cum autem accedente radio A N ad A C (*Fig.* 90.) incidat tandem A N in A B, & K N in K B, erit tum A C, A B::C K, K B. Quamobrem si sumatur in A C punctum Z, ut sit A C, A B::C Z, B Z, erit punctum Z limes, citra quem ad partes centri C nullius incidentis reflexus axem A C decussabit. Id vero si lubet, poterit etiam sequenti alia ratione demonstrari. Sit ad punctum N tangens N T, quæ angulum A N K bifariam secet, cum sit angulus G N O æqualis angulo A N O, ideoque A N T æqualis G N X, seu T N K; sit quivis incidens A N ad axem A C ut libet proximus, cujus reflexus K N G. Est N H æqualis N K, & (per Proposit. 3 l. 6 Eucl.) A N, N K::A T, T K; quapropter habebit A N ad N K, hoc est A N ad N H minorem rationem, quam A B ad B K, hoc est, quia C N, K H parallelæ sunt, habebit A C ad C K minorem rationem, quam A B ad B K, & permutando, A C ad A B minorem rationem, quam C K ad B K; ergo (per hypotesim) habebit etiam C Z ad B Z minorem rationem, quam C K ad B K; & componendo, B C ad B Z minorem, quam B C ad B K; ergo B Z major erit, quam B K; ergo punctum Z cadet intra K, & centrum C circuli.

PROPOSITIO LIV.

Theorema.

Si duo sint radiantia puncta A, *&* R (Fig. 91) *quorum illud a speculo remotius, hoc proximius; dico limitem* Z *reflexorum primi esse a puncto* B *remotiorem, quam sit* X *limes secundi.*

Nam est B C ad A B in minori ratione, quam sit B C ad R B, &, componendo, A C ad A B in minori ratione, quam R C ad R B; ergo (per Corollar. prim. Proposs. præced.) erit C Z ad B Z in minori ratione, quam C X ad B X, & componendo, C B ad B Z in minori ratione, quam C B ad B X; ergo B Z major B X.

PROPOSITIO LV.

Theorema.

Incidat radius A O (Fig. 92) *in reflectentem convexam superficiem sphæricam* O B, *cujus centrum* C; *reflexus radius sit* Q O H. *Tunc fiat* 2 C A, C B::C B, C y; *&* *demittatur* O r *perpendicularis ad* B C: *dico fore* $y r$, y C:: A C, C H.

 Du-

Ducatur perpendicularis AI ad CO productam, & capta IE = IC, agatur AE, cui sit parallela CG. Ex constructione æqualia sunt triangula EAI, IAC: ergo anguli AEI, ACI æquales sunt; sed angulus AEI æqualis est angulo GCO ob parallelas EA, GC; & insuper angulus incidentiæ GOC æqualis angulo reflexionis COH; igitur æqualia erunt triangula GCO, COH; & GC æqualis CH. Sunt autem similia triangula EOA, GOC; ergo erit AE (seu AC), GC (seu CH:)::OE, OC (seu CB). Ob similitudinem vero triangulorum CIA, CrO erit etiam CI, Cr::CA, CO, & duplicando antecedentes, CE, Cr: 2CA, CO (seu CB) ::CO, Cy (per constructionem) & alternando, CE, CO::Cr, Cy; &, dividendo, OE, CO, (seu CB)::yr, Cy. Erat autem AC, CH ::OE, CB; igitur tandem erit yr, yC::AC, CH.

PROPOSITIO LVI.

LEMMA.

Sumptis æqualibus arcubus OM, MN, NB (*Fig.* 93) *ductisque ad* BC *perpendicularibus* Nx, Mu, Or: *erit intercepta* ru *major* ux, *&* *hæc major* Bx.

Nam concipiantur subtensæ OM, NM, NB, & demittantur Mm, Nn ad BC parallelæ, erit angulus MOm major NMn; sunt autem Mm, Nn sinus angulorum MOm, NMn sub æqualibus radiis OM, MN; ergo Mm major Nn, seu ru major ux.

Eodem ratiocinio ostendes ux majorem esse xB. Si vero arcus OM, MN, NB decrescant, eo magis interceptæ ru, ux, xB majores fient.

PROPOSITIO LVII.

THEOREMA.

Sumptis æqualibus arcubus BN, NM, MO (*Fig.* 94) *incidentium radiorum* AN, AM, AO *in convexam superficiem reflectentem* ONB *sint reflexi retro producti* NK, ML, OH: *erit intercepta* HL *major* KL.

Nam sumpta Cy, ut in Propos. LV, erit yr, yC::AC, CH; item yu, yC::AC, CL; & tandem yx, yC::AC, CK; ergo erit

$$CK = \frac{AC \times yC}{yx}, \; CL = \frac{AC \times yC}{yu}, \; \& \; CH = \frac{AC \times yC}{yr};$$

seu CK, CL::yu, yx; & dividendo KL, CL::ux, yx. Tum CL, CH:: yr, yu, ideoque per conversionem rationis, CL, LH::yr, ru; igitur KL, LH::ux × yr, yx × ru. Sed per Lemma ux minor ru; ergo HL major KL.

Corol-

Corollarium Primum.

Si non arcus OM, MN, sed anguli NAM, OAM sumantur æquales, arcus OM erit major MN, atque ideo intercepta *ur* fiet etiam major *ux*, ideoque & LH major quam LK.

Corollarium Secundum.

Reflexi itaque radii RN, PM, QO divergentes a speculo procedunt; quapropter eorum unus tantummodo centrum oculi ingredi poterit, ideoque una tantummodo a convexo hujusmodi speculo puncti A imago exhiberi potest.

Corollarium Tertium.

Rectius igitur incidentium reflexi magis ac magis ad limitem Z (*Fig.* 90) accedunt hac lege, ut bini, & bini semper intercipiant in axe intervalla minora; & propius ad limitem Z, ubi refertissimi sunt, ibi erit focus imaginarius, seu imaginarius locus imaginis puncti A, oculo uspiam in axe AC constituto.

Corollarium Quartum.

Si fiat (*Fig.* 95) ut intervallum AC puncti A a centro C speculi convexi ad speculi radium, ita speculi radius ad tertiam lineam CF, & ducatur normalis FN secans circulum in N, erit punctum N limes arcus BN, ultra quem emanantium

tium radiorum nullus in speculum incidet, nullusque erit refractus. Erit enim NA tangens circulum.

Attamen si oculus sit extra axem constitutus, aliud quidpiam quærendum prius est, in quam rem sit

PROPOSITIO LVIII.

PROBLEMA.

Datis extra circulum MM, *cujus centrum* A, *duobus punctis* F, E, *invenire in circuli peripheria puncta* M *talia, ut ductis diametro* AM, *rectis* FM, EM, *angulus* FMA *sit æqualis angulo* EMA, *nimirum ut* FM, EM *sit alter alterius reflexus radius* (Fig. 96).

Sumatur AB tertia proportionalis ad AF, AM, & AD tertia proportionalis ad AE, AM, & erit AD major AB, si quidem AE sit minor AF; secus vero, erit AD minor AB. Jungantur puncta, B, D, & bifariam secta BD in C, ducatur indefinita OCH ad AF parallela, & CL parallela ad AE; tum sumptis CG, CK æqualibus inter se, quarum quadratum sit æquale differentiæ quadratorum ex dimidia DA, & ex dimidia AB, centro C, ad diametrum transversam CG, vel conjugatam CK describantur oppositæ hyperbolæ æquilateræ; hæ secabunt circulum in quæsitis punctis. Cum

Cum enim in triangulis AFM, AMB sit angulus A communis, & (per constructionem) sit AF, AM::AM, AB, erunt (per Propos. 6 lib. 6 Eucl.) triangula similia, ideoque angulus ABM æqualis angulo AMF. Eadem ratione erit angulus ADM par angulo AME; est autem DB bifariam secta in C; quamobrem quia OH est parallela ad AB, & CL parallela ad DA, erunt AD, AB bifariam sectæ in L, & O. Hoc posito ductis MP parallela ad AD, & MQ parallela ad AB, per proprietatem hyperbolæ æquilateræ, quadratum ex HM, seu OQ æquatur quadratis simul ex CH, & CK, hoc est ex LP, & CK; est autem (per Prop. 6 lib. 2 Euclid.) quadratum OQ æquale rectangulo AQD una cum quadrato OD, & quadratum LP æquale rectangulo APB una cum quadrato LB; igitur est rectangulum AQD una cum quadrato OD æquale rectangulo APB una cum quadrato LB, & cum quadrato CK; sed (per constructionem), quadratum CK est æquale differentiæ quadratorum ex OD, & LB, atque ideo quadratum ex LB una cum quadrato CK est æquale quadrato OD; igitur rectangulum AQD æquatur rectangulo APB, & (per Propos. 14 lib. 6 Euclid.) erit AQ, BP::AP, DQ, hoc est MP, BP::QM, QD. Sunt autem in parallelogrammo PMQA æquales oppositi anguli MPB, MQA; ergo similia triangula MPB, MQD; quamobrem

obrem æquales anguli MBP, MDQ, ac proinde æqualia horum complementa MBA, MDA ad duos rectos, quibus (per constructionem) æquales sunt AMF, AME; ergo punctum M erit, quod petebatur.

Punctum 2 M oppositæ hyperbolæ satisfacit quæstioni intra angulum ad verticem oppositum angulo EAF, eritque angulus A 2 MF æqualis angulo A 2 ME, ut eadem superiori ratione demonstratur. Duo vero reliqua puncta 3 M, 4 M dant angulum A 3 ME æqualem complemento ad duos rectos (*Fig.* 97) anguli A 3 MF, vel A 4 MF æqualem complemento ad duos rectos anguli A 4 ME. Nam repetita eadem constructione, eodemque ratiocinio, est angulus MBP par angulo MDA, hoc est AME; sed MBP est complementum ad duos rectos anguli MBA, hoc est anguli AMF.

Hujus problematis plures dantur casus; potest enim punctorum alterum esse extra circulum, alterum intra; vel duo simul intra; at hisce casibus eadem hæc constructio facile accommodari poterit, ut pluribus non sit opus.

Si data puncta sint in ipsa circuli peripheria, vel extra, æqualiter tamen a centro distantia, res nullo negotio conficitur. In utroque enim casu (*Fig.* 98, 99) bifariam secto arcu EF, vel angulo EAF, recta AM in M, ductisque rectis EM, FM, erit alter alterius reflexus radius, quod

PROPOSITIO LX.

THEOREMA.

Si præcedentis Propositionis incidentes duo radii AN, AR (Fig. 101, 102) *sibi sint infinite proximi, quorum reflexi* NQ, RH *se intersecent alicubi in puncto* Z, *ac bifariam secentur* NP, NQ *in* E, *&* F; *dico fore* FZ, ZN:: EA, AN.

Arcus NR, PS, quia sunt infinite parvi, erunt inter se, ut eorum subtensæ, quod similiter dicatur de arcu QH. Quamobrem (per Prop. 36 l. 3, & 14 l. 6 Eucl.) erit PA, AS:: AR, AN; ideoque (per Prop. 6 lib. 6 Eucl.) triangula PAS, RAN erunt similia, eritque PS, RN::PA, RA, & quia (id quod sequitur ex facta hypothesi) differentia inter RA, & NA est infinite parva, erit etiam PS, RN:: PA, NA, & componendo, PS cum dupla RN, RN::PA cum dupla NA, NA, hoc est (per Propos. præced.) arcus QH ad arcum RN, ut PA cum dupla NA ad NA. Sed arcus hujusmodi sunt, ut subtensæ QH, RN, subtensæ vero, ut QZ ad ZR, vel ZN propter differentiam infinite parvam; ergo erit QZ, ZN::PA cum dupla NA, NA; & componendo QN, ZN::PA cum tripla NA, NA, & sumendo antecedentium dimidia, FN, ZN::dimidium aggregati PN cum quadrupla NA, NA, & dividendo FZ, ZN:: dimidium PN cum NA, NA; est autem dimidium PN cum NA æquale EA; ergo erit FZ, ZN::EA, NA.

At ubi punctum A sit intra circulum (*Fig.* 102), reassumpta analogia superiori PS, RN :: PA, NA, erit etiam PS, 2RN::PA, 2NA, & etiam 2RN subducto SP, 2RN:: 2NA subducta PA, 2NA; differentia vero inter PS, & 2NR (per Propos. præcedentem) æquatur arcui, seu chordæ QH; ergo erit, dividendo consequentes per binarium, QH, RN::2NA subducta PA, NA, nempe QZ, ZN::2NA subducta PA, NA, & componendo QN, ZN :: 3NA subducta simplici PA, NA, & sumendo antecedentium dimidia, FN, ZN:: $\frac{3NA}{2}$ subducta $\frac{PA}{2}$, NA, & dividendo FZ, ZN::EA, NA.

Erit itaque punctum Z locus, in quo objecti A imago videri debet ab oculo in reflexo radio GNQ constituto; illic enim imago versari debet, ubi axis opticus, seu reflexus ille, qui per centrum oculi transit, secatur a reflexis radiis incidentium illorum, qui principali incidenti AN sunt quamproximi.

L E-

LECTIO NONA.

AD Catopticæ complementum paucæ, ut mihi quidem videtur, Propositiones restant de radiis, qui a puncto aliquo in cavam circularem superficiem incidunt; quas brevi hac Lectione complector.

PROPOSITIO LXI.

THEOREMA.

Si incidunt radii AN *a quovis puncto* A *in cavam speculi circularis superficiem* (Fig. 103, 104) *quorum unius reflexus sit* NK, *erit similiter, ut Propositione LIII. vidimus*, AC, AN:: CK, KN.

Ducatur a puncto K recta KH ad circuli radium CN parallela, secans AN productam in H. Quoniam æquales esse debent anguli CNA, CNK, & propter parallelas CN, KH, angulus CNA est æqualis angulo KHN, & angulus CNK est æqualis angulo NKH, erunt æquales inter se anguli KHN, NKH; ergo & lineæ NK, NH. Est autem AC; AN::CK, NH; igitur erit AC, AN::CK, KN.

Si a puncto A ducatur ad circulum tangens AS (*Fig.* 103) hæc erit, ut patet, limes, citra

tra quem venientium radiorum a puncto A nullus in cavam peripheriam incidet.

Corollarium Primum.

Si incidens radius (*Fig.* 104) AN sit æqualis AC, reflexus NV erit ad axem AB parallelus. Nam quamdiu sit AN major AC, erit CK semper minor KN, quæ tum demum æquales erunt, cum erunt infinitæ, & tunc erunt CK, NK, seu NV parallelæ. Id autem alia etiam ratione facile probari potest.

Nam sumptis AC, AN æqualibus, & ducta CN, æquales sunt anguli ACN, ANC, & angulus VNC, qui debet esse æqualis angulo ANC, erit æqualis angulo ACN; ideoque AC, NV parallelæ.

Corollarium Secundum.

Si assumatur (*Fig.* 104) AN minor AC; quoniam est AC, AN::CK, KN, erit KN minor quam CK; id autem fieri non potest, nisi punctum K secet axem in aversa parte infra punctum A, in quam partem cadet incidentis radii reflexus productus NK.

Corollarium Tertium.

Quoniam vero perpetuo accedens radius AN (*Fig.* 103) propius ad axem AB, coincidit tandem cum AB, & cum eadem AB coincidit

cidit etiam reflexus KN; erit AC, AB::quæpiam CZ, ZB; quamobrem punctum Z erit limes, citra quem ad partes centri C nullius incidentis reflexus axem AC decussabit. Et quoniam est AC, AN::CK, NK, erit AC ad AB in minori ratione, quam sit CK ad NK, & quam sit CK ad BK. Cum ergo sit CZ, BZ ::AC, AB, erit CZ ad BZ in minori ratione, quam sit CK ad BK, & componendo CB ad BZ in minori ratione, quam CB ad BK; ergo BZ major erit quam BK, seu CZ minor quam CK.

At ubi punctum radians sit intra circulum (*Fig.* 104), si fuerit AC minor semisse semidiametri CB circuli reflectentis, erit semper AN radius incidens (sive sit extra diametrum, ut AN, sive in ipsa diametro, ut AB, vel AD) major AC; quamobrem quo magis radii incidentes ad CB accedunt, eo reflexi ad punctum C appropinqant: illorum vero incidentium, qui ad AD se se adjungunt, reflexi ultra punctum B uniuntur: quare punctum A duos focos habebit ad eamdem partem centri C, quorum alter ad radios in B, alter ad radios in D incidentes pertinebit. Sin autem AC hoc semisse major fuerit, hinc inde a centro erunt foci.

In hoc eodem casu puncti A intra circulum dati erit AN major AD, quare habebit AC ad AD majorem rationem, quam ad AN, hoc

hoc est majorem rationem, quam habeat CK, NK; erit ergo CZ ad DZ in majori ratione, quam CK ad NK, seu DK; & dividendo, CD ad DZ in majori ratione, quam CD ad DK; ergo DZ minor erit, quam DK.

PROPOSITIO LXII.

THEOREMA.

Si duo sint radiantia puncta A, *&* R, *quorum illud* (Fig. 105) *a speculo remotius, hoc proximius; dico limitem* Z *reflexorum primi esse a puncto* B *minus distantem, quam sit* X *limes reflexorum secundi*.

Est enim BC ad CA in minori ratione, quam BC ad CR, & componendo, BA ad CA in minori ratione, quam BR ad CR, & invertendo AC ad AB in majori, quam CR ad BR; ergo (per Corollarium Tertium Proposit. præcedentis) erit CZ ad BZ in majori ratione, quam CX ad BX; ergo CX minor quam CZ.

PROPOSITIO LXIII.

THEOREMA.

Si duo sint incidentes radii AN, AM (Fig. 107) *obliquioris* AM *reflexus* ML *axem decussabit in* *in* L *propius ad punctum* B, *quam rectioris* AN *reflexus* NK.

Quoniam est AC, AN::CK, NK, & AC, AM::CL, LM; habet autem AC ad AN minorem rationem, quam AC ad AM; habebit etiam CK ad NK minorem rationem, quam CL ad LM. Verumtamen si punctum L sit in K, vel infra, quia erit LM major KN, non habebit CL ad LM majorem rationem, quam CK ad NK, nisi sit etiam CL major CK; ergo reflexus ML decussabit axem propius ad punctum B, quam reflexus NK.

Corollarium.

Reflexi itaque NK, ML se se prius intersecant, quam axem.

PROPOSITIO LXIV.

THEOREMA.

Incidat radius AO (Fig. 106) *in reflectentem cavam superficiem sphæricam* OB, *cujus centrum* C; *reflexus radius* QOH. *Demittatur* Or *perpendicularis ad* BC, *& fiat* 2CA, CB::CB, Cy; *dico fore* yr, yC::AC, CH.

Ducatur perpendicularis AI ad OC productam, & capta IE æquali IC, agatur AE, cui

cui sit parallela CG. Jam, ut in Propos. LV, erit AC, CH::OE, CB: item CE, CO::Cr, Cy; & componendo OE, CO (seu CB)::yr, Cy. Igitur erit yr, Cy:: AC, CH.

Corollarium.

Si punctum radians A (*Fig.* 108) sit ultra punctum C, & sit HO reflexus incidentis AO: tunc erit CH, CA::yr, Cy, ut patet.

PROPOSITIO LXV.

THEOREMA.

Sumptis æqualibus arcubus (Fig. 107) BN, NM, MO, *incidentium radiorum* AN, AM, AO *in cavam superficiem sphæricam reflectentem* MNB *sint reflexi* NK, ML, OH: *erit intercepta* HL *major* LK.

Ductis ad BC perpendicularibus Or, Mu, Nx, per Propos. anteced. erit yr, yC:: AC, CH: item yu, yC:: AC, CL: & tandem yx, yC:: AC, CK. Quamobrem $CK = \frac{AC \times yC}{yx}$; $CL = \frac{AC \times yC}{yu}$; $CK = \frac{AC \times yC}{yr}$. Igitur CK, CL::$yu$, yx: hoc est KL, CL::ux, yx. Tum CL, CH::yr, yu: hoc est CL, LH::yr, ru; ergo KL, LH:: $ux \times yr$, $yx \times ru$. Sed

(per

(per Propos. LVI) ux minor est ru; ergo $ux \times yr$ minor est $yx \times ru$, seu KL minor LH.

Corollarium Primum.

Si punctum A (*Fig.* 108) sit ultra centrum C (per Coroll. Propos. LXIV) erit $HC, CA :: yr, Cy$: item $LC, CA :: yu, Cy$; & tandem $KC, CA :: yx, Cy$. Quamobrem $LK, CL :: ux, yu$, & etiam $CL, LH :: yu, ru$; ergo ex æquo $LK, LH :: ux, ru$; sed (per Prop. LVI) ru major ux; ergo & LH major LK.

Corollarium Secundum.

Rectiores itaque radii (*Fig.* 107, & 108) videlicet axi proximiores reflectuntur ita, ut propius ad limitem Z magis ac magis accedant, & partes secent in axe subinde minores: quapropter ibi erunt confertissimi, ibique erit verus focus, & imaginis puncti A locus, oculo in axe constituto.

Corollarium Tertium.

Si fiat (*Fig.* 110) ut AC ad radium CN circuli, ita CN ad tertiam CF, & ducatur normalis FN, erit punctum N limes arcus BN, citra quem emanantium radiorum nullus in speculum cavum incidet, nullusque erit reflexus; nam, juncta AN, hæc erit tangens circulum.

Scholion.

Reliquum nunc est, quemadmodum locus ipse nos admonet, ut determinetur imaginis locus pro visu extra axem posito, nimirum ut intersectio duorum reflexorum inveniatur, quorum incidentes sint infinite proximi. Id autem nullo negotio habetur, si huic quoque casui, & his figuris 102, & 103 ea accommodentur, quæ in Propositionibus LIX, & LX demonstrata sunt, quæ apprime conveniunt, modica adhibita diligentia; quapropter pluribus abstineo.

LECTIO DECIMA.

Exposita jam satis, ut arbitror, commode tum plana, tum circulari Catoptrica, ad Dioptricem accedimus, cujus aliqua in superioribus Lectionibus attigimus, & quadam quasi affinitate materiæ antevertimus. Et quoniam, ibi de refractione ad planam superficiem satis ea diximus, quæ erant dicenda, agemus hic porro de legibus, quæ radiis conveniunt ad circularem superficiem refractis, puncto ab infinita distantia radiante, hoc est radios ad sensum parallelos projiciente; quamobrem sit

PROPOSITIO LXVI.

Teorema.

Incidant in medium NB (Fig. 111, 112) *sphærica superficie, vel convexa, vel cava terminatum, cujus centrum* C, *e rariori medio in densius radii, ut* MN, *vel e densiori in rarius* (Fig. 113, 114) *ad axem* BC *paralleli; si producta* BC, *fiat* BZ *ad* CZ *in ratione refractionis, nempe ut* I *ad* R, *& secta* CZ *in* F, *sit similiter* FZ, FC:: I, R, *& centro* F *per* Z *describatur circulus* EGZ, *sitque incidens quivis radius* MN, *& ducatur* NC *per centrum* C, *quæ producta secat circulum* EGZ *in*

in G, *atque in axe capiatur* CK *æqualis* CG; *connectaturque* NK, *erit* NK *incidentis* MN *radius refractus*.

Ducantur rectæ FG, BG. Quoniam est tum BZ ad CZ, tum FZ ad FC :: I, R, erit BZ, CZ :: FZ, FC, & permutando, BZ, FZ :: CZ, FC, & dividendo, BF, FZ::FZ, FC, hoc est BF, FG::FG, FC. Itaque (per Prop. 6. l. 6. Eucl.) triangula BFG, GFC sunt similia; quapropter erit BG, GF::GC, CF, & permutando BG, GC::GF, CF; seu::FZ, CF, nempe BG, GC::I, R. Verum triangula BCG, NCK sunt similia; sunt enim latera CN, CB æqualia inter se, ut & CG, CK, & æquales anguli ad C; ergo BG, GC::NK, CK, hoc est NK, CK::I, R; ergo (per Proposit. XI) erit NK ipsius MN refractus radius.

Corollarium Primum.

Accedente itaque radio MN magis ac magis ad axem BC, accedit similiter CG ad CZ itaut si MN incidat in ipsam BC, & CG incidet in CZ, punctumque K in Z. Est ergo limes Z, ultra, vel infra quem, comparate ad centrum C, nullius incidentis refractus axem secat, estque tum BZ, CZ::I, R.

Corol-quam, unius digiti, ſemidiameter CB octo digitorum, ac fiat refractio ex aere in aquam, unde refractionis ratio ea ſit, quæ eſt ternarii ad binarium. Ex ſumma logarithmorum

ſinus totius	10 . 0000000
& datæ NV	0 . 0000000
ſubtrahatur log. ſem. CN	0 . 9030900
relinquetur logar. ſinus anguli VCN	9 . 0969100

hoc eſt anguli incidentiæ, cui in canone reſpondent gradus proxime 7.° 10'. 50". Cum vero ſit ratio refractionis, ſeu ſinus anguli VCN ad ſinum anguli refracti CNK, ut 3 ad 2, erit ſinus anguli CNK .833370

ejuſque logarithmus 8 . 9208517

cui in canone reſpondent proxime gradus 4.° 46'. 50". Igitur ex angulo VCN ſi demas angulum CNK, habebitur angulus CKN grad. 2.° 24', cujus logarithmus 8 . 6219616

Cum autem latera ſint ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia, ex ſumma logarithmorum

anguli CNK, & ſemidiametri CB	9 . 8239417
ſubducatur logarith. anguli CKN	8 . 6219616
erit reliquus logarithm. lateris CK	1 . 2019801,

cui reſpondet numerus fere ſexdecim digitorum pro longitudine CK; huic ſi addatur ſemidiameter CB, habebitur BK. Aliis in locis pluribus operari ſimiliter poterit, ſed exemplum unum hic dediſſe ſat erit.

PRO-

PROPOSITIO LXVII.

LEMMA.

In circuli diametro ZE (Fig. 109) *citra centrum* F *accipiatur quodlibet punctum* C, *ex quo ductis ad peripheriam rectis* CH, CG, *anguli* ZCG, GCH *æquales ſint: dico interceptam* sr *ab ordinatis* Hs, Gr *majorem eſſe quam* rZ.

Sit primo punctum C intra circulum. Producatur CH in M ita, ut ſit CM æqualis CZ, ducaturque MZ. Triangula MCO, OCZ ex conſtructione ſunt æqualia; angulus igitur COZ rectus eſt: at angulus CGZ eſt minor recto; ergo recta MZ ſecabit GC in aliquo puncto O. Quamobrem, erectis ordinatis M*u*, ON, erunt ſimilia triangula ZON, ZM*u*, & ZO, OM:: Z*n*, *nu*; ſunt autem æquales ZO, OM. æquales igitur erunt & Z*n*, *nu*; & inde *sr* major, quam *r*Z.

Si vero punctum *c* cadat extra circulum, ducantur rectæ HI, ZI. Angulus externus GIH æqualis eſt duobus internis oppoſitis IH*c*, H*c*I; ita etiam angulus ZIG æqualis eſt *c*ZI, & I*c*Z. Sunt autem æquales anguli I*c*H, I*c*Z per conſtructionem, & angulus IH*c* major angulo IZ*c*; ergo angulus GIH major angulo GIZ, ſeu arcus HG major GZ. Eſt igitur (per Prop. LVI) intercepta *rs* major, quam *r*Z.

 Poſ-

Possèt tandem punctum c esse in E, seu ipsa circuli peripheria. Sed tunc per primam partem jam constat esse similiter sr majorem rZ; ergo ec.

PROPOSITIO LXVIII.

THEOREMA.

Si arcus BN, NR *sumantur æquales ab incidentibus radiis axi parallelis* MN, OR *intercepti, sive a rariori medio in densius, ut in* Fig. 119, 120, *sive contra, ut in* Fig. 121, 122, *erit* KL *a refractis radiis* NK, RL *intercepta major quam* KZ.

Centro C, intervallis CG, CH describantur arcus GK, HL, & erectis ordinatis Hs, Gr, a centro F ducantur radii FG, FH. Quadratum CZ æquale est quadratis CF, FZ una cum duobus rectangulis CF × FZ. Quadratum vero CG æquale est quadratis CF, FG, & duobus rectangulis CF × Fr. Differentia igitur quadratorum CZ, CG est duorum rectangulorum CF × rZ. Eodem ratiocinio demonstratur differentiam quadratorum CG, CH esse æqualem duobus rectangulis CF × sr. Erit igitur $\overline{CZ}^2 - \overline{CG}^2, \overline{CG}^2 - \overline{CH}^2 :: CF \times rZ, CF \times sr :: rZ, sr$. Sed quia æquales sunt anguli BCN, NCR, seu HCG, GCL, erit per Lemma superius sr major, quam rZ; ergo differentia quadratorum CG, CH major differentia quadratorum CZ, CG; seu duo rectangula CL × LK una cum quadrato LK majora sunt, quam duo rectangula CK × KZ una cum quadrato KZ: seu rectang. $LK \times \overline{LK + 2CL}$ majus, quam $KZ \times \overline{KZ + 2CK}$. Sit linea AD ita minor LK, ut rectangulum $AD \times \overline{AD + 2CL}$ par sit rectangulo $KZ \times \overline{KZ + 2CK}$; erit $KZ + 2CK, AD + 2CL :: AD, KZ$: est autem $KZ + 2CK$ major quam $AD + 2CL$; ergo & AD, & a fortiori LK, major quam KZ.

Corollarium Primum.

Si arcus NB bifariam dividatur in y, radii incidentes inter B & y habebunt refractos in arctiori spatio Zx coarctatos, quam incidentes inter y & N, & sic deinceps. Si igitur refracti radii convergentes fuerint, ut in *Fig.* 119, & 121, in puncto Z confertissimi sunt, ibique erit focus, seu imaginis locus objecti radios projicientis ad sensum parallelos, ideoque objectum videbitur circa punctum Z ab oculo in axe posito.

Corollarium Secundum.

Si vero non arcus BN, NR sumantur æquales, sed æqualia intervalla incidentium radiorum, tum arcus a puncto B deinceps semper majores fient, & proinde multo major utique diffe-

differentia rectarum Zr, rs; atque ideo majora subinde intervalla ZK, KL.

PROPOSITIO LXIX.

THEOREMA.

Si duo segmenta (Fig. 123, 124) NBR, VHO *subtensas* NR, VO *æquales habeant, quarum* VO *ad majorem pertineat circulum, sitque* NK *incidentis* MN *refractus;* VK *refractus incidentis* MV, *&* Z, T *limites refractionum: dico* KZ *majorem esse quam* KT.

Sint C, & X centra circulorum NBR, VHO, & F, S, centra circulorum EGZ, EGT secundum Proposit. LVI constructionem; erit BC, CF::HX, XS, nempe ut $I^2 - R^2$, R^2. Ducantur FL ad NG, & SI ad VG normales; erit CN, NP, hoc est CB, NP:: CF, FL, & permutando, CB, CF::NP, FL; similiter erit XV (seu XH), VQ (seu NP)::XS, SI, & permutando XH, XS::NP, SI; sed est CB, CF::XH, XS; ergo CB, CF::NP, SI; igitur erit NP, FL::NP, SI; quamobrem æquales FL, SI. Est autem angulus FCL major angulo SXI; igitur differentia inter CF, CL major, quam inter XS, XI (quod mox demonstrabitur); & per eamdem rationem major etiam differentia inter FG, seu FZ, & LG, quam inter SG (seu ST), & IG. Ergo major est differentia inter totam CZ, & totam CG, seu CK, quam inter totam XT, & totam XG, seu XK; igitur KZ major est, quam KT.

Dixi differentiam inter CF, & CL majorem esse, quam sit differentia inter XS, & XI. Nam sit (*Fig.* 125) triangulum CLF idem; quod Figuræ 123, & CIS, quod XIS Figuræ 124, & sint æquales LF, IS, quæ normaliter insistant rectæ CLI, ac centro C describantur circuli LHQ, IAP, & ducantur per centrum C rectæ FHQ, SAP. Rectangulum QF×FH (per Propos. 36 l. 3 Eucl.) est æquale quadrato LF, & rectangulum PS×SA est æquale quadrato IS, seu LF; ergo æqualia inter se rectangula QF×FH, & PS×SA; igitur (per Propos. 14 l. 6 Eucl.) PS, QF::HF, AS; est autem PS major QF; ergo & HF major AS.

Corollarium.

Cum autem eadem lucis quantitas ab arcubus NR, VO excipiatur, & eadem refracta colligatur in minori spatio KT, & in majori KZ, erit in KT magis constipata, ibique confertissimi erunt radii, qui violentius agent; quamobrem validior erit focus, & imago radiantis puncti distinctior, si segmentum refringens majoris sit sphæræ.

PRO-

PROPOSITIO LXX.

PROBLEMA.

In circulo (Fig. 126) *puncto quovis* A *dato*, *invenire in peripheria puncta* N, *in quæ incidentes radii ad axem* QP *paralleli e rariori medio in densius habeant refractos per datum punctum* A *transeuntes*.

Problema hoc construitur ab Isaaco Barovv in Lectione 12 breviter, & elegantissime, ope tamen curvæ cujusdam per infinita puncta descriptæ, quam constructionem, si lubet, ibi videre poteritis. Ego vero malo hanc vobis exhibere per machinulam quamdam, cujus inventionem, & effectionem acceptam refero Comiti Joanni Baptistæ Suardi Clarissimo viro, cujus ingenii acumen, & solertiam in hujusmodi inventionibus semper sum admiratus.

Machina est hujusmodi. Sub dati circuli radio ex ære, aut quovis metallo, aut ligno fiat rombus NHGC, cujus latera producantur, ut fiant romboides NHDF, NCML æquales, & sit NF, NC, seu NL, NH::I, R. Sit autem machina hæc mobilis circa angulos singulos ita, ut facile contrahi, & diduci possit, prout opus fuerit; ad centrum C clavo sit parieti affixa, quæ tamen circa ipsum centrum revolvi possit, & punctum N totam peripheriam describere. Duo fila NM, ND ponduscutis onusta pendeant a puncto N, illud libere, hoc autem in D claviculum D tangat, ut perpetuo romboidis NH DF diagonalem DN signet. Tota machina hæc verticaliter sita sit; deinde contrahendo, aut diducendo romboides, & machinæ conversione circa centrum C, tum demum immota statuatur, cum transeunte filo ND per datum punctum A, filum alterum NM in punctum M accuratissime cadet: quo facto, punctum in circuli peripheria puncto N respondens erit quæsitum.

Quia (per constructionem) est NF, NC, seu NF, FD::I, R, erunt etiam sinus angulorum NDF, DNF lateribus hisce oppositorum::I, R. At triangula NMC, NDF sunt similia, & æqualia; & proinde æquales inter se NDF, MNC anguli; igitur erit etiam sinus anguli MNC ad sinum anguli DNF::I, R, & radius NA refractus incidentis MN.

Quatuor autem omnino, nec plura invenio, esse possunt hujusmodi puncta N, duo videlicet respondentia duobus radiis in convexam peripheriam QNH incidentibus, unum incidenti radio in convexam QX, & unum incidenti in concavam HGP; vel unum incidenti radio in convexam QNH, duo incidenti in concavam PX; interdum vero duo tantum, nonnunquam omnino nullum pro data refractionum ratione, & puncti A positu, quod facile ex Propos. LXVI, & ejus

S Figu-

Figuris cognosci potest. Id autem animadvertendum est, ut omnia possibilia puncta N habeantur, invertendum præterea instrumentum esse ita, ut punctum H, quod in sinistra parte est, inversione facta, transeat ad dexteram; similiter circuli media conversione punctum supremum Q fiat infimum, & P supremum.

Si vero punctum A datum sit in ipsa circuli reflectentis diametro, problema planum est, & facile construitur. Sit enim (*Fig.* 127) datum punctum A. Ad R, & I, quæ sunt mediorum refractiones, & ad CA inveniatur quarta proportionalis, quæ sit T; tum centro A, intervallo rectæ T, describatur circulus, qui priorem secabit in aliquo puncto N; punctum hoc erit quæsitum. Demonstratio pendet a Propos. XI.

PROPOSITIO LXXI.

LEMMA.

In circulo NAB (Fig. 128) *cujus centrum* C, *sint ad semidiametrum* CA *perpendiculares* RF, NE, *& ad semidiametrum* CB *sint perpendiculares* XH, NG; *sit præterea* CE, EF::CG, GH, *si fuerit arcus* NR *infinite parvus, atque ideo etiam* NX, *dico arcum* NR *ad arcum* NX *esse, ut factum ex* CE *in* NG *ad factum ex* EN *in* CG.

Duca-

Ducatur ad punctum N tangens NQ, & QO normalis ad NE, QL normalis ad NG. Quia sunt arcus NR, NX infinite parvi, poterunt sumi pro portionibus QN, TN tangentis. Sunt vero triangula QNO, CNE similia; quamobrem erit QN (seu RN), QO (seu FE):: CN, EN, & permutando, RN, CN::FE, EN; similiter ducta T*u* parallela ad HC, per similitudinem triangulorum NT*u*, CNG, erit CN, NT, (seu NX)::GN, GH; habet igitur RN ad NX rationem compositam ex rationibus RN ad CN, & CN ad NX, nempe ex rationibus EF ad EN, & GN ad GH; nimirum, quia per hypotesim est EF, GH:: CE, CG, his pro illis substitutis, erit NR ad NX in composita ratione CE ad EN, & GN ad GC; hoc est NR, NX:: factum CE × NG ad factum EN × GC.

PROPOSITIO LXXII.

THEOREMA.

Incidat in refringentem circulum BR (Fig. 128) *radius quilibet* MNP, *sitque refractus* NV, *cui incidenti sit infinite proximus alter incidens* QRS, *& hujus refractus* RD *priorem* NV *secans in* Z; *si subtensæ* NP, NV *bisecentur in punctis* E, G, *dico fore* NZ *ad* GZ *in composita ratione* NG *ad* NE, *&* CE *ad* CG.

 Du-

Ducantur CE, CI; illa producta secet RS in F, hæc sit ad RD perpendicularis, & protracta CG, sumatur CH æqualis CI, & per H ducatur XHY ad NV parallela. Erunt jam æquales arcus NX, YV, & (per Proposit. 14 l. 3 Eucl.) æquales subtensæ XY, RD, & ideo illarum arcus. Est itaque arcus NR cum arcu DV æqualis duplo arcui NX, & (per Coroll. Proposit. XI) est CG, CE::R, I; & similiter CI, seu æqualis CH, CF::R, I; igitur CG, CE::CH, CF, & permutando CG, CH::CE, CF; atque ideo etiam CG, GH::CE, EF; ergo (per præcedentem Proposit.) arcus NR ad arcum NX in composita ratione NG ad NE, & CE ad CG. At propter arcuum NR, SP, VD exiguitatem loco arcuum sumendo subtensas NR, VD, habebitur NR, VD::NZ, ZD, seu::NZ, ZV. Ergo inverse componendo NR arcus ad arcum NR cum VD::NZ, ad NZ cum ZV. Est autem NR cum VD æqualis duplo arcui NX, ut modo vidimus, & NZ cum ZV æqualis duplæ GZ; ergo erit arcus NR ad arcum NX::NZ, GZ, & propterea NZ ad GZ in composita ratione NG ad NE, & CE ad CG.

Si punctum intersectionis Z cadat intra circulum (*Fig.* 129.), loco aggregati arcus NR, & DV, & aggregati NZ, & ZV sumantur ubique differentiæ, & omnia apprime huic quoque casui convenient.

Co-

Corollarium Primum.

Porro constructio, qua hujusmodi punctum Z obtineri possit, perfacilis est. Ad refractum NK (*Fig.* 130) ducatur normalis CG, & connectatur CN, ad quam fiat perpendicularis GV, & per V ducatur VZ parallela ad CK, secans NK in Z: dico factum. Nam connexa GE, circulus diametro CN descriptus transibit per G, & E, quia anguli CGN, CEN recti sunt. Igitur anguli CEG, CNG æquales sunt (per Proposit. 21 l. 3 Eucl.); est autem CNG æqualis CGV, ideoque æquales inter se CEG, CGV, & utrique addito recto angulo, fient æquales GEN, VGZ; sunt præterea æquales alterni GNE, GZV; ergo similia triangula GNE, GZV, ideoque erit NG, NE::ZV, ZG; quapropter antecedentes multiplicando per eamdem CE, & consequentes per eamdem CG, erit etiam productum NG x CE, NE x CG::ZV x CE, ZG x CG. Est autem (per Proposit. XI) NK, KC, seu NZ, ZV::I, R, & (per Coroll. ejusdem Proposit.) est NZ, ZV::CE, CG; igitur facta substitutione, habebitur NG x CE, NE x CG::ZV x NZ, ZG x ZV, nimirum NZ, ZG::NG x CE, NE x CG; ergo per ea, quæ in Proposit. ostensa sunt, erit Z punctum quæsitum.

Co-

Corollarium Secundum.

Refractus radius NK ita sectus est in Z, ut sit NZ, ZK::quadratum NG, quadratum GC. Nam propter parallelas VZ, CK, est NZ, ZK::NV, VC, nempe (per Proposit. 8 l. 6 Eucl.) in duplicata ratione NV ad VG, hoc est ut quadratum NV ad quadratum VG, seu ut quadratum NG ad quadratum GC.

Scholion.

In puncto Z præcedenti ratione determinato erit igitur locus imaginis, oculo in recta ZK collocato.

LECTIO UNDECIMA.

De refractione radiorum eorum, qui a puncto emanantes in sphæricam, sive convexam, sive cavam superficiem incidunt, agemus in hac Lectione. Sequens Propositio præcipua est in re hac, & maxime generalis.

PROPOSITIO LXXIII.

Theorema.

Sit punctum lucidum A, *& incidat radius* AN *e rariori medio in densius, sive in convexam, sive in cavam sphæricam superficiem* BN (Fig. 131, 132, 133, 134) *aut a densiori medio in rarius* (Fig. 133, 136), *& producta per sphæræ centrum* C *indefinite* AC, *si opus est, sit* NK *refractus radius: dico fore* I, R::AC × NK, CK × NA.

Ducatur NCG, & producta AN in H, fiant KH ad NC, & KG ad NH parallelæ. Erit (per Proposit. XI) I, R::KN, KG, seu HN, & multiplicando duos posteriores analogiæ terminos per eamdem quantitatem AN, erit I, R::KN × AN, HN × AN; est autem AN, NH::AC, CK; ergo his pro illis substitutis, erit I, R::AC × NK, CK × NA.

Corollarium Primum.

Si fiat CA, CR :: I, R, erit CK, CR :: NK, NA. Nam erit CA, CR :: AC × NK, CK × NA, & multiplicando priores terminos per eamdem quantitatem AN, erit CA × AN, CR × AN :: AC × NK, CK × AN, & dividendo per communem rationem CA ad AN, erit AN, CR :: NK, CK, & invertendo, ac permutando, CK, CR :: NK, NA.

Corollarium Secundum.

Ducta in iisdem Figuris a puncto R recta RQ parallela ad NK (producto radio NC, ubi est opus) erunt similia triangula NKC, CRQ; & ideo rectangulum CQ × CK æquale rectangulo CR × NC.

Corollarium Tertium.

Hinc rectæ QR, AN æquales inter se. Nam per Corollar. Prim. est CK, CR :: NK, NA: ob similitudinem vero triangulorum NCK, CRQ est etiam CK, CR :: NK, QR; ergo NA æqualis QR.

Corollarium Quartum.

Ex dictis fluit expeditissimus modus alius inveniendi punctum K. Centro R (iisdem Figuris), intervallo AN describatur arcus, qui secet radium CN in aliquo puncto Q, tunc fiat CQ, CR :: CN, CK, erit K punctum quæsitum. Nam ex constructione erunt similia triangula CQR, CNK; ergo NK, KC :: QR (seu AN), RC; ergo per Corollar. Prim. erit NK refractus radius incidentis AN.

Corollarium Quintum.

Quoniam per Coroll. Secund. est rectangulum CQ × CK æquale rectangulo CR × NC, erit etiam CK æquale $\frac{CR \times CN}{CQ}$; hinc si fuerit AN æqualis CR, punctum Q cadet in C, & CQ nihilo æqualis; erit igitur CK æqualis $\frac{CR \times CN}{O}$; hoc est CK infinita, seu refractus radius NK axi parallelus.

Si fuerit AN major, quam CR (*Fig.* 131) recta RQ cadet extra angulum NCR, & NK secabit axem infra B. Si vero minor (*Fig.* 132), recta RQ versabitur in angulo NCA, & refractus radius NK retro productus axem supra B decussabit.

Etiam in *Fig.* 133, 134, in quibus est I major, quam R, accidere quidem potest, ut punctum A hujusmodi sit, ut habeatur AN æqualis CR, aut etiam minor: attamen manifestum jam est, si, quidem punctum A sit supra C (ut in *Fig.* 133) refractos omnes secare axem supra C, & infra

infra A; si punctum A sit infra (*Fig.* 134) refractos axem secare & infra C, & supra A.

In casu *Fig.* 135, ubi I est minor quam R, quoniam NA semper minor est quam CA, & ideo minor quam CR, linea RQ cadet semper intra angulum NCA, & ideo refracti omnes secabunt axem supra B & infra A.

In eodem casu I minoris quam R (*Fig.* 136, 137) in quibus A est supra C, si sit AN æqualis CR, CQ prorsus evanescet, & ideo erit per Corollar. secund. CK æqualis $\frac{CR \times CN}{O}$; hoc est refractus radius NK axi parallelus; at si fuerit AN major CR, recta RQ cadet intra angulum NCA, & punctum K erit supra C. Si vero AN minor CR, recta RQ cadet extra angulum NCA, ut in *Fig.* 137, & punctum K infra B. In *Fig.* vero 138, in qua A est infra centrum C, punctum K cadet semper infra A, quæcumque sit magnitudo AN.

Tandem si sit AN æqualis CR (in *Fig.* 139); ubi I major est quam R, radii incidentes arcui NB refractos habebunt secantes axem supra B; incidentium extra NB refracti axem decussabunt infra B; refractus vero ipsius AN erit axi parallelus. At in *Fig.* 140, ubi I minor est quam R, si sit AN æqualis CR, omnes radii incidentes arcui NB refractos habebunt infra B, reliqui vero supra, præter AN, cujus refractus erit axi parallelus.

PRO-

PROPOSITIO LXXIV.

THEOREMA.

Si e rariori medio in densius, vel contra incidat in convexam, aut cavam superficiem BN, *cujus centrum* C (Fig. 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148) *radius quilibet* AN, *cujus refractus* NK, *& sit, ut supra,* AC, CR :: I, R, *& fiat* AB, CR :: BZ, CZ, *erit* CK, CZ :: NK × AB, NA × BZ.

Sit igitur incidens quivis AN, & hujus refractus NK. Est (per Coroll. prim. præcedentis Proposit.) CK, CR :: NK, NA: porro est (per hypotesim) CR, CZ :: AB, BZ; ergo CK erit ad CZ in composita ratione CK ad CR, & CR ad CZ, hoc est erit CK, CZ :: NK × AB, NA × BZ.

Corollarium Primum.

Hoc posito transeat radius e rariori medio in densius in convexam superficiem, & sit primo AN major quam CR (*Fig.* 141), ut punctum K sit infra B (per Coroll. quint. Propos. antec.), & quoniam est BK major quam NK, & AB minor quam AN, habebit BK × AB ad BZ × AB majorem rationem, quam NK × AB ad NA × BZ; hoc est quam CK ad CZ; ergo BK × AB ad BZ × AB (hoc est BK ad BZ)

majo-

majorem rationem, quam CK ad CZ, & permutando, BK ad CK majorem, quam BZ ad CZ, & dividendo BC ad CK majorem quam BC ad CZ; ergo CK minor est quam CZ; igitur punctum K erit intra Z, & C.

Sit nunc AN minor quam CR, ideoque punctum K supra B, & supra A (per Coroll. quintum Propos. præced.). Ducatur (*Fig.* 142) chorda BN, & sit AS ad KN parallela. Quia angulus ABN, atque ideo ASN est obtusus, erit AN major quam AS, ideoque KN ad AN minorem rationem habebit, quam KN ad AS, seu quam KB ad AB. At quia est CK, CZ :: NK x AB, NA x BZ, habebit CK ad CZ minorem rationem, quam KB x AB ad BZ x AB, hoc est quam KB ad BZ, & permutando CK ad KB minorem quam CZ ad BZ, & dividendo, CB ad BK minorem, quam CB ad BZ; igitur BK major est quam BZ, ideoque punctum K ultra Z.

Et quoniam (*Fig.* 141) est AB, CR :: BZ, CZ, erit dividendo AB — CR, CR :: BC, CZ. Quamobrem si fuerit AB æqualis CR, erit AB — CR nihilo æqualis. Ut igitur CZ habeat ad BC, eamdem rationem, quam habet CR ad nihilum, punctum Z debet abire in infinitum; hoc est radius refractus erit axi parallelus. Id autem ex Coroll. primo, & quinto Propos. anteced. facile colligi potest.

Co-

Corollarium Secundum.

Incidat radius AN, cujus refractus NK, e rariori medio in densius in cavam superficiem BN (*Fig.* 143). Punctum lucidum A vel est in refringente circulo BN, vel extra; & quidem sit primo in circulo, sive in ipsa peripheria, sive intra, & a puncto B per N ducatur chorda BN, a puncto vero K recta KS parallela ad AN. Erit itaque angulus ANB aut rectus, aut acutus, prout punctum A erit in ipsa peripheria, aut intra: quamobrem angulus KNB necessario minor erit angulo KSN; igitur KS minor KN; ergo AB x NK habebit ad AN x BZ majorem rationem, quam AB x KS ad AN x BZ, seu quam AB x BK ad AB x BZ, hoc est quam BK ad BZ; ergo CK ad CZ majorem rationem habebit quam BK ad BZ, & permutando, invertendo, ac dividendo, BC ad CK minorem, quam BC ad CZ; ergo CK erit major quam CZ, & punctum K supra Z.

Sit punctum A extra circulum, ita tamen, ut angulus KNB sit minor angulo ANV, seu KSN, erit etiam KS minor KN, & eadem ratione punctum K demonstrabitur supra Z.

Sit nunc punctum A extra circulum ita, ut angulus KNB sit major angulo ANV (*Fig.* 144), & ducatur AV ad KN parallela; erit AV minor AN: quamobrem AB x NK ad

AN

AN × BZ habebit minorem rationem, quam AB × NK ad AV × BZ, seu quam AB × BK ad AB × BZ, hoc est quam BK ad BZ; ergo CK ad CZ minorem rationem habebit quam BK ad BZ, & permutando, invertendo, ac dividendo, BC ad CK majorem rationem quam BC ad CZ; igitur CK minor erit CZ, & punctum K infra Z.

Si vero, quod quidem contingere potest, angulus ANV sit æqualis angulo KNB, erunt isoscelia triangula KNS, ANV, eritque tum CK, CZ :: AB × NK, AV × BZ, seu :: AB × BK, AB × BZ, nempe CK, CZ :: BK, BZ, & permutando, invertendo, ac dividendo, BC, CK :: BC, CZ; æquales ergo CK, CZ, & punctum K incidet in Z. Immo vero si fuerit CB æqualis CR, generatim omnes refracti coibunt in puncto Z. Nam (*Fig.* 145), quia est AB, CR :: BZ, CZ, si sit CB æqualis CR, erit AB, CB :: BZ, CZ, & dividendo AC, CB :: CB, CZ. Quapropter assumpto ad libitum quovis puncto N, & a centro ducta CN, erit etiam AC, CN :: CN, CZ, & triangula ACN, NCZ similia, ideoque AN, CN, seu CR :: ZN, ZC; ergo (per Coroll. prim. Propos. LXXIII) erit ZN refractus radius cujusvis incidentis AN; igitur refracti omnes coeunt in puncto Z, qui casus est singularis. Hoc autem maxime confirmat casum anguli ANV æqualis angulo ZNB; nam angulus ANC est æqualis angulo NZC, & angulus externus ZNV æqualis est duobus NZC, & NBZ; & angulus ANB est æqualis duobus ANC, & CNB, hoc est duobus NZC, NBZ; igitur æquales sunt ZNV, ANB, & ablato communi ANZ, erit ANV æqualis ZNB.

Si denique punctum A (*Fig.* 146) sit infra centrum circuli, erit KS major quam KN, ac proinde AB × NK ad AN × BZ minorem rationem habebit, quam habeat AB × KS ad AN × BZ, seu quam AB × BK ad AB × BZ; igitur etiam CK ad CZ minorem rationem habebit quam BK ad BZ, & permutando, ac invertendo, & componendo, BC ad CK majorem quam BC ad CZ; igitur CK minor est CZ, & punctum K supra Z.

Corollarium Tertium.

Sit I minor quam R, nimirum incidat radius AN (*Fig.* 147), e densiori medio in rarius, & quidem in convexam superficiem BN. Iisdem positis, ut supra, ductisque subtensa BN, & recta KS ad AN parallela, erit KS minor KN. Cum autem sit CK, CZ :: AB × NK, AN × BZ, erit CK ad CZ in majori ratione quam AB × KS ad AN × BZ, seu quam AB × KB ad AB × BZ, idest quam KB ad BZ, & permutando, CK ad BK majorem rationem habebit quam CZ ad BZ, & dividendo, CB ad ad BK majorem quam CB ad BZ; ergo BK minor est quam BZ, & punctum K infra Z.

Corollarium Quartum.

In eadem hypotesi I minoris, quam R incidat radius AN in cavam superficiem BN (*Fig.* 148) factisque ceteris omnibus, ut supra, sit primo AN minor quam CR, quo refractus radius NK axem secet infra B. Est ergo CK ad CZ::NK x AB ad NA x BZ; sed NK est major quam BK, & NA minor AB; ergo CK ad CZ majorem rationem habebit, quam AB x BK ad AB x BZ; hoc est quam BK ad BZ, & permutando, CK ad BK majorem quam CZ ad BZ, & dividendo, BC ad BK majorem quam BC ad BZ; ergo BK minor est quam BZ, & punctum K supra Z.

Sit nunc AN major CR, quo refractus radius NK axem secet supra punctum centrum C, & in subtensam BN ducatur AS parallela ad KN, & sit primo angulus KNV, seu ASN major angulo ANS, (qui casus accidere non potest, nisi punctum A sit intra circulum, hoc est CA minor CB) erit AS minor AN, & reasumpta eadem analogia CK, CZ:: AB x NK, AN x BZ, habebit CK ad CZ minorem rationem quam AB x NK ad AS x BZ, seu quam AB x KB ad AB x BZ, hoc est quam BK ad BZ, & permutando, invertendo, & dividendo, BC ad CK majorem, quam BC ad CZ; itaque punctum K erit infra Z.

Si vero angulus KNV sit minor angulo ANS (qui casus accidet semper, dum sit AC æqualis, vel major CB; at si AC sit minor CB, potest angulus KNV esse major, minor, vel æqualis angulo ANS) erit & AN minor AS; quamobrem CK ad CZ habebit majorem rationem, quam habeat AB x NK ad AS x BZ, hoc est quam AB x KB ad AB x BZ, seu quam BK ad BZ; & permutando, invertendo, ac dividendo, BC ad CK minorem quam BC ad CZ; ergo punctum K cadet supra Z.

Si anguli ANB, KNV sint æquales, triangulum ANS erit isoscele, & æquales inter se AN, AS; ergo erit CK, CZ:: AB x NK, AS x BZ, seu:: AB x BK, AB x BZ::BK, BZ, & permutando, & invertendo BK, CK:: BZ, CZ, & dividendo BC, CK::BC, CZ; igitur CK, CZ æquales, & hujusmodi reflexi radii coibunt in puncto Z. Immo vero generatim quoties fuerit CR æqualis CB, incidentium omnium refracti coibunt in puncto Z, quemadmodum Corollar. secund. demonstratum est.

Corollarium Quintum.

Erit itaque punctum Z limes, ultra, vel citra quem (habita ratione casuum enumeratorum) nul-

nullius incidentis refractus axem intersecabit, eritque BZ veluti refractus radius incidentis perpendicularis AB. Enim vero accedente AN ad AB magis ac magis, ut tandem cum ipsa AB conveniat, conveniet quoque KN cum BC, ac fiet KN quævis, exemp. grat. BZ; quoniam vero (per Coroll. prim. Prop. LXXIII) est AN, CR :: NK, CK, erit in hoc casu AB, CR :: BZ, CZ, & Z erit punctum dispersus. At quia est etiam CR, CA :: R, I; erit AB, CA, in composita ratione BZ ad CZ, & R ad I, videlicet AB, CA :: BZ × R ad CZ × I, hoc est $\frac{AB}{R}$, $\frac{CA}{I}$ :: BZ, CZ, atque ideo I, R :: CA × BZ, BA × CZ; & si arcus circuli BN in rectam lineam transeat, centrum C infinite distabit, eruntque infinitæ, & æquales CA, CZ; quapropter formula mutatur in I, R :: BZ, BA, quod optime consonat tum Proposit. XI, tum Propos. XIX.

Si fuerit punctum A infinite distans, ita ut radios projiciat parallelos, erunt BA, CA infinitæ, atque ideo æquales; quapropter erit I, R :: BZ, CZ; &, R subducta, erit I — R :: BC, CZ.

Et si refracti radii paralleli sint, erunt infinitæ, & æquales BZ, CZ; quamobrem AC, AB :: I, R. Si ex his quatuor punctis A, B, C, Z tria quævis data sint, reliquum quoque haberi potest, ut patet.

PRO-

PROPOSITIO LXXV.

THEOREMA.

Si a duobus punctis A, & P (Fig. 149) *quorum alter* A *sit a superficie refringente remotius, incidant radii, & refractorum eorum, qui emanant a puncto* A, *sit limes* Z, *erit alterius puncti* P *limes* Y *a superficie refringente remotior, quam* Z.

Est enim (per postremum superius Corollar.) I, R :: AC × BZ, AB × CZ; similiter I, R :: PC × PY, BP × CY; ergo AC × BZ, AB × CZ :: PC × BY, BP × CY. Sed quia BC habet ad AB minorem rationem, quam BC ad PB, habebit, componendo, AC ad AB minorem rationem, quam PC ad PB; ergo BZ ad CZ majorem rationem, quam BY ad CY, & dividendo, BC ad CZ majorem rationem, quam BC ad CY; ergo CY major erit, quam CZ; idque sive in convexam, sive in cavam, sive e rariori medio in densius incidat radius, sive contra.

Corollarium.

Immo vero (*Fig.* 150) si radii quicumque AF, VD in circulum ita incidant, ut æquales ad semidiametros faciant angulos AFC, VDC, sintque eorum refracti FL, DM, erit CM major CL. Nam quia incidentium radiorum angu-

 li

li AFC, VDC æquales sunt, erunt æquales etiam refracti CDM, CFL; quapropter ducatur BN, quæ cum BC angulum faciat æqualem angulo CDM, vel CFL, & a punctis D, F per centrum C ducantur DCN, FCP. Triangula FCL, BCP habent angulos CFL, CBP æquales; & sunt æquales ad verticem FCL, BCP; præterea æqualia sunt latera CD, CB, CF; ergo æqualia erunt latera CL, CP. Eadem ratione in triangulis DCM, BCN æqualia sunt latera CM, CN. Porro quia angulus BCD minor est angulo BCF, erit reliquus primi ad duos rectos, nempe BCN major reliquo secundi ad duos rectos, nempe BCP; igitur CN major CP, videlicet CM major CL.

Scholion.

Ex hac Propos. facile ratio reddi potest, quamobrem punctum lucidum radios vivide jaculans, si ultra consuetam distantiam positum inspiciatur, majus appareat, & quodam capillitio redimitum, quod minime accidit, objecto in mediocri distantia collocato. Esto (*Fig.* 151) punctum lucidum hujusmodi A modice distans a circulari medio MBN, sitque axis FBZ, & focus Z, ac per Z linea, seu recta, seu circularis RZS perpendiculariter transeat. Si aliud remotius punctum T assumatur, ductis radiis TM, TN, horum refracti propius ad centrum C ofocum habebunt, ut in K, & producti refracti MK, NK secabunt in punctis O, P, lineam RS. At si ulterius sumatur punctum F, ac radiorum FM, FN refracti ducantur MR, NS, erit eorum focus propior C, & lineæ RS occurrent punctis R, S; ex quo apparet intervallum RS majus esse quam OP. Itaque si sidus aliquod, vel ardens lucerna remotior ab oculo sit, quam ratio distinctæ visionis ferat, & redimita videbitur, & major. Nam si arcus MBN oculi pupillam repræsentet, linea RS oculi fundum, seu retinam, AB distinctæ visionis distantia, punctum A satis angustum spatium illustrabit ad Z. Si vero punctum lucidum sit in T, quoniam validissime, ut ponimus, radios vibrat, illustrabit spatium OP; porro ad F collocatum illustrabit spatium RS, majoremque efficiet speciem sui. Id vero minime iis objectis contingit, qui modicam, & placidam lucem remittunt, quod pauciores, & languidiores radii ad O, & P allabentes nequeunt sui perceptionem excitare, minimeque oculo sentiuntur. Immo vero hujusmodi radii ibi, & obscuram, & perturbatam admodum, atque confusam imaginem objectorum pingunt.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

PROBLEMA.

Datis in producta diametro circuli BNQ (Fig. 152) *duobus punctis* A, K, *ductisque ad duo quælibet peripheriæ puncta* M, N *rectis* AN, NK; AM, MK, *determinare utrum ratio* AN *ad* NK *major, æqualis, aut minor sit ratione* AM *ad* MK.

Si hujusmodi sint puncta, A, & K, ut habeatur AC, CB, :: CB, CK, jam a Galileo primum demonstratum est in Dialogo primo de motu, deinde ab aliis, rationes hasce æquales esse; id igitur assumo, quo posito

Primo. Sit, manente puncto K, punctum alterum datum supra A, ut in H. Fiat CH, CB :: CB, CV; erit V infra K, & (per Theorema Galilei), & permutando NH, NV :: MH, MV, & permutando NH, MH :: NV, MV. At quo propius punctum V accedit ad centrum C, eo magis ratio NV ad MV accedit ad æqualitatem; igitur habebit NV ad MV majorem rationem, quam NK ad MK; ergo habebit NH ad MK majorem rationem, quam NK ad MK, & NH ad NK majorem, quam MH ad MK.

Secundo. Sit, manente puncto A, punctum alterum datum infra K, ut in V. Quoniam est AN, AM :: NK, MK, & NK ad MK habet minorem rationem quam NV ad MV, erit AN ad AM in minori ratione quam NV ad MV, & permutando, NA ad NV minorem rationem habebit, quam MA ad MV.

Tertio. Manente puncto K, punctum alterum datum sit infra A, ut in *b*. Fiat C*b*, CB :: CB, C*u*, & erit punctum *u* supra K. Quoniam est *b*N, *b*M :: N*u*, M*u*; & est N*u* ad M*u* in minori ratione, quam NK ad MK, habebit *b*N ad *b*M minorem rationem quam NK ad MK, & permutando N*b* ad NK minorem rationem, quam M*b* ad MK.

Quarto. Si duo data puncta sint A, & H ambo extra circulum, erit NH ad NA in majori ratione, quam MH ad MA. Etenim quoniam NH ad MH majorem habet rationem quam NK ad MK, & est NK, MK :: NA, MA, habebit NH ad MH majorem rationem quam NA ad MA, & permutando NH ad NA majorem rationem quam MH ad MA. At si data puncta sint A, & *b*, erit *b*N ad NA in minori ratione, quam *b*M, MA. Est enim *b*N ad *b*M in minori ratione, quam NK ad MK, ergo etiam quam NA ad MA, & permutando *b*N ad NA in minori ratione, quam *b*M ad MA.

Quinto. Si duo puncta sint ambo in circulo, ut in B, & K, erit NB ad NK in minori ratione, quam MB ad MK. Est enim NB ad MB

MB in minori ratione quam NK ad MK; ergo permutando NB ad NK in minori ratione, quam MB ad MK.

Sexto. Si duo puncta data sint extra circulum (*Fig.* 153) sintque A, K, & ductæ lineæ terminentur ad convexam peripheriam, erit NK ad NA in minori ratione, quam MK ad MA. Centro M arcus describatur AI, & centro N arcus AS. Erit KI major KS, & SN major IM; ergo erit KS ad SN in minori ratione, quam KI ad IM, & componendo, KN ad SN, seu AN in minori ratione, quam KM ad IM, seu AM.

PROPOSITIO LXXVII.

THEOREMA.

Obliquioris radii e rariori medio in densius incidentis in convexam sphæricam superficiem (Fig. 154, 155) *refractus radius axem secat supra sectionem rectioris, hoc est, qui incidentes minus distant ab axe, refractos habent propius accedentes ad limitem Z. Si vero incidant in cavam superficiem* (Fig. 156) *obliquioris refractus axem secat supra sectionem rectioris in uno casu, infra in altero.*

Incidant primo radii AM, AN (*Fig.* 154) in convexam superficiem, habeantque refractos MK,

MK, NL: dico fore BK majorem, quam BL in casu, quo AM major sit, quam CR; contra vero esse BK minorem, quam BL (*Fig.* 155) si sit AM minor, quam CR secundum Corollar. quintum Proposit. LXXIII.

Connexis CN, KN, & ducta LH (*Fig.* 154) ad KN parallela, erit (per Coroll. prim. dictæ Propos.) CK, CR::MK, NA; & similiter CR, CL::NA, NL; ergo multiplicando rationes, erit CK × CR, CL × CR, hoc est CK, CL::MK × NA, MA × NL. Est vero NK ad NA in minori ratione, quam MK ad MA, quia NK est minor MK, & NA major MA; ergo erit CK ad CL in majori ratione, quam NK × NA ad NA × NL, hoc est NK ad HL in majori ratione, quam NK ad NL; ergo HL est minor, quam NL. Est autem angulus NCL obtusus; ergo LH angulum CLN secat, & angulus LHC externus major est interno LNC; unde liquido constat CK majorem esse, quam CL.

Sit AM minor quam CR, & refractionum (*Fig.* 155) intersectiones fiant supra B. Eadem superiore ratione erit CK, CL::MK × NA, MA × NL. Est autem (per Num. sext. Propos. præced.) NK ad NA in minori ratione, quam MK ad MA; ergo CK ad CL erit in majori ratione, quam NK × NA ad NA × NL, hoc est NK ad HL in majori ratione, quam NK ad ad NL; ergo HL erit minor quam NL; & quoniam angulus CNL est necessario obtusus, non potest HL esse minor NL, nisi punctum L sit supra K.

Incidant radii in cavam sphæricam superficiem BMN (*Fig.* 156). Si puncta A, & K ita locata sint, ut habeatur CK, CB::CB, CA, erit (per Galilei Theorema) AN, NK::AM, MK, quo in casu singulari incidentium omnium refracti coeunt in puncto K; erunt enim HL, NL æquales inter se, quæ nequeunt esse, nisi ambæ cadant in NK. Præterea quia est CK, CB::CB, CA, erit etiam invertendo, AC, CB::CB, CK. At quoniam (per Corollar. secund. Prop. LXXIV) si sit AC, CB::CB, CZ, omnes refracti coeunt in puncto Z, & ipsum punctum K erit in Z.

Sit punctum A remotius a centro C, quam assignata modo analogia postulat, ductis iisdem lineis, factaque LH parallela ad KN, erit similiter CK, CL::MK × NA, MA × NL. Sed (per num. prim. præced. Propos.) habet AN ad NK majorem rationem, quam AM ad MK, seu AN ad AM majorem quam NK ad MK; ergo habebit CK ad CL majorem rationem quam MK × NK ad MK × NL, hoc est NK ad HL majorem, quam NK ad NL; ergo HL minor quam NL, quod fieri nequit, nisi punctum L sit infra K.

Sit

Sit punctum A propius ad centrum, quam in eadem data ratione. Erit (per num. tert. præc. Propos.) NA ad NK in minori ratione, quam MA ad MK, seu AN ad AM in minori quam NK ad MK; igitur erit CK ad CL in minori ratione, quam MK × NK ad MK × NL, hoc est KN ad LH in minori ratione, quam KN ad NL; ergo LH erit major quam NL, & punctum L supra K.

Si punctum utrumque A, & K (*Fig.* 156) extra circulum statuamus, erit (per num. quart. præced. Propos.) NA ad NK in majori ratione, quam MA ad MK, & CK ad CL in majori ratione, quam MK × NK ad MK × NL, hoc est NK ad HL in majori ratione, quam NK ad NL; ergo HL minor NL, & punctum L infra K.

Si punctum alterum K sit in circulo, alterum A aut in circulo, aut in peripheria, erit (per num. quint. præced. Propos.) NA ad NK in minori ratione, quam MA ad MK, atque ideo CK ad CL in minori ratione quam NK ad NL, hoc est NK ad HL in minori ratione quam NK ad NL; ergo HL major quam NL, & punctum L supra K.

Corollarium Primum.

Esto punctum lucidum A (*Fig.* 157) in densiori medio, cujus radii AM, AN incidant in medium rarius sphærica superficie convexa BMN

X 2 termi-

terminatum. Planum est refractos radios retro productos axem secare infra A. Incidentis AM refractus axem secet in K; incidentis AN refractus secet in L, & ducantur MK, NK, NL. Erit (per num. sext. præced. Propos.) NA ad NK in minori ratione, quam MA ad MK. Quamobrem reassumpta superiori analogia, factisque, quæ ibi facta sunt, inveniemus HL majorem quam NL; est autem angulus LNC semper obtusus; nam si sit aut rectus, aut acutus, erit radius NL reflexus, non refractus; ergo punctum L cadet infra K.

Corollarium Secundum.

Incidant radii similiter e densiori medio in rarius in cavam superficiem BMN (*Fig.* 158), & duo puncta A, & K sint extra circulum. Erit (per num. quart. Propos. præced.) NK ad NA in majori ratione, quam MK ad MA; atque ideo LH minor quam LN, estque angulus LCN obtusus; ergo punctum L cadet infra K. At si punctum A sit intra circulum, & AN major quam CR secundum Coroll. quart. Propos. LXXIV, cadet L infra K, quoad habeatur proportio CA, CB::CB, CK; erit enim semper NK ad NA in majori proportione, quam MK ad MA. In casu vero hujus Propositionis erit NK, NA::MK, MA, atque ideo æquales HL, NL: quamobrem HL, NL cadent in NK,

NK, & punctum L, ac reliquorum omnium refractorum coibunt in eodem puncto K; immo vero & ipsum K in puncto limitis Z.

Si punctum A sit intra circulum, & AN (*Fig.* 159) minor quam CR, ut refractus radius axem secet infra B, secundum Coroll. quart. Propos. LXXIII, punctum L cadet supra K inter K & circulum. Habet enim AN ad NK minorem rationem, quam AM ad MK, atque ideo CK ad CL minorem rationem, quam NK ad NL, hoc est NK ad HL minorem rationem quam NK ad NL; igitur HL major NL; est autem angulus CNL obtusus; ergo punctum L supra K.

PROPOSITIO LXXVIII.

LEMMA.

Si a quocumque puncto C *sive intra circulum, cujus centrum* D (Fig. 160), *sive extra* (Fig. 161), *ducantur ad peripheriam in eadem parte a centro tres rectæ* CQ, Cu, Cr, *ita ut anguli* QCu, uCr *sint æquales, & centro* C *intervallis* Cr, Cu *describantur arcus* rb, ua, *erit* Qa *ad* ab *in majori ratione quam* QC *ad* Cr.

Rectæ CQ, C*u*, C*r* producantur in K, L, X; & centro C, intervallis CK, CL describantur ar-

arcus KM, LE, & per puncta D, C ducatur diameter FG. Rectangula QC × CK, *u*C × CL, *r*C × CX (utpote quæ singula sunt æqualia eidem rectangulo GC × CF) erunt æqualia inter se. Igitur QC, *u*C :: CL, CK; & dividendo Q*a*, *a*C :: EM, CK, seu rectangulum Q*a* × CK æquale rectangulo *a*C × EM. Eadem ratione æqualia erunt rectangula *ba* × CL, *r*C × XE. Quamobrem rationes CK ad CL, Q*a* ad *ba* simul sumptæ æquales erunt rationibus EM ad XE, *u*C ad *r*C (seu CX ad CL) simul sumptis. Sed ratio CX ad CL componitur ex rationibus CX ad CK (seu CQ ad C*r*), & CK ad CL simul sumptis. Ablata igitur utrimque ratione CK ad CL, remanebit ratio Q*a* ad *ba* æqualis rationibus EM ad XE, CQ ad C*r* simul sumptis. Ergo cum jam sit EM major XE ob æquales angulos XCL, LCK, erit etiam Q*a* ad *ba* in majori ratione, quam CQ ad C*r*.

PROPOSITIO LXXIX.

THEOREMA.

Sumptis æqualibus arcubus MN, NP, PB (Fig. 162, 163) *incidentium radiorum* AM, AN, AP *sint refracti radii* MK, NL, PX: *ad hos radios refractos ducantur a puncto* R *parallelæ* RQ, Ru, Rr, *& centro* C, *intervallis* Cu, Cr *describatur arcus* ua, rb, *erit* Qa *ad* ab *in majori ratione quam* CQ, Cr, *sive radii incidant in convexam superficiem a rariori medio in densius, & sit* AP *major* CR (*ut in Fig.* 162), *sive incidant radii in cavam a densiori medio in rarius, & sit* AP *minor* CR (*ut in Fig.* 163) *& punctum* A *intra circulum.*

Rectangula CQ × CK, C*u* × CL, C*r* × CX (utpote quæ per Coroll. secund. Proposit. LXXIII eidem rectangulo constanti CB × CR æqualia sunt) erunt æqualia inter se. At per Proposit. LXXVII, rectæ CX, CL, CK sunt decrescentes; ergo etiam harum reciprocæ CQ, C*u*, C*r* decrescentes pariter erunt. Sunt autem æquales anguli RC*u*, *u*CQ. Ergo si per hæc tria puncta *r*, *u*, Q describatur circulus, rectæ CQ, C*u*, CR cadent in eamdem circuli partem a centro. Igitur per Lemma præcedens erit Q*a* ad *ab* in majori ratione quam CQ ad C*r*.

PROPOSITIO LXXX.

THEOREMA.

Eadem posita constructione, ac in Proposit. antecedenti, erit semper KL *major* LX.

Quoniam CQ × CK, C*u* × CL, C*r* × CX sunt inter se æqualia, erit CQ, C*a* :: CL, CK; & disionem rationis & permutando) erit DC, EC:: dC, eC. Est autem DC ad EC (per Corollar. Propos. XI), ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis, propterea quod NK sit refractus ipsius AN, ideoque etiam dC est ad eC, ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis; & proinde cum anguli DAd, EZe sint infinite parvi, atque ideo Cd ad An, & Ce ad nZ perpendiculares, vel saltem perpendiculis æquipollentes, erit nZ refractus incidentis An.

Corollarium Primum.

Est ND, NE, sive NP, NF::NR, NQ. Nam acta NC, propter triangula similia NRV, NDC, & NEC, NQV, est ND, NR:: NC, NV::NE, NQ; & alternando ND, NE::NR, NQ. Hinc promptior existit Problematis solutio; nempe ad radios AN, NK erigantur normales NR, NQ, quarum NR axi AC occurrat, & sit NQ, NR::NF, NP; dein agatur QC, quæ cum NK in quæsito puncto Z conveniet.

Corollarium Secundum.

Si punctum radians A infinite distet, sive parallelos projiciat radios, posito I ad R in ratione refractionis, erit $I \times NP$, $R \times NP$::NZ, EZ. Est enim (per superius Corollar.) ND, NE:: NR, NQ; sed ubi radii incidant paralleli, est NR æqua-

æqualis DC, atque ideo erit ND, NE::DC, NQ, & NQ æqualis $\frac{NE \times DC}{ND}$. Porro per similitudinem triangulorum NQZ, ECZ, est NQ, EC::NZ, EZ; ergo erit $\frac{NE \times DC}{ND}$, EC, (hoc est $NE \times DC$, $EC \times ND$)::NZ; EZ; sed (per hypothesim) est DC, EC::I, R; ergo erit $I \times NE$, $R \times ND$::NZ, EZ, seu $I \times NF$, $R \times NP$::NZ, EZ, quæ determinatio eadem est omnino, atque illa, quam Propos. LXXII vidimus.

Scholion.

Erit itaque Z (per ea, quæ jam sæpe diximus) imaginis locus puncti A, oculo uspiam in recta ZK constituto.

PROPOSITIO LXXXII.

PROBLEMA.

Dato puncto lucido A (Fig. 165) *& dato in axe* AK *puncto* K, *incidentem in convexum circulum* NB *radium invenire, cujus refractus per punctum* K *transeat. Sit* CA, CR::I, R, *& fiat* CK, CR::KG, AG; *item fiat* CK, CR, *hoc est* KG, AG::GF, FA: *centro* F, *intervallo* FG *circulus describatur refringentem in* *in* N *secans; incidentis radii* AN *erit refractus* NK.

Ducatur FN; quoniam est KG, AG::GF, FA, erit permutando, KG, GF::AG, FA, & dividendo, KF, GF::GF, FA, hoc est KF, FN::FN, FA. Quamobrem similia sunt triangula KFN, NFA; itaque est NK, KF::AN, NF, & permutando, NK, AN::KF, FN. Est autem etiam KF, FN::FN, seu GF, FA, hoc est::CK, CR; ergo NK, AN::CK, CR; ergo (per Corollar. prim. Proposit. LXXIII) NK erit incidentis AN refractus.

LECTIO DUODECIMA.

Accedimus nunc ad refractionis leges, quas sequitur natura radiorum illorum, qui neque paralleli procedunt, neque a puncto emanantes sunt, sed ad punctum aliquod convergunt; sit itaque

PROPOSITIO LXXXIII.

THEOREMA.

Incidat e rariori medio in densius, aut e densiore in rarius, vel in convexam, vel in cavam circularem peripheriam BN (Fig. 166, 167, 168, 169, 170), *cujus centrum* C, *radius quilibet* MN *tendens ad datum punctum* A, *& producta, si opus est*, BA, *ac ducta* CK *ad* AN *parallela, sit* NK *refractus radius secans* AB *in* V: *dico fore* I, R::AC × NV, AN × CV.

Ducatur NC, & producta, si opus est, AN in H, fiant VH ad NC, & VO ad NH parallelæ. Erit (per Propos. XI) I, R::NK, CK, hoc est::NV, VO, & multiplicando duos posteriores analogiæ terminos per eamdem quantitatem AN, erit I, R::AN × NV, AN × VO;

est autem AN, NH, seu VO::AC, CV; ergo his pro illis substitutis, erit I, R::AC × NV, AN × CV.

Si punctum A sit supra centrum C (*Fig.* 167) eadem est constructio, & demonstratio.

Corollarium Primum.

Si fiat CA, CR::I, R, erit AN, CR:: NV, CV. Nam erit etiam CA, CR::AC × NV, AN × CV, & multiplicando duos priores terminos per eamdem quantitatem AN, fiet AN × CA, AN × CR::AC × NV, AN × CV, & dividendo per communem rationem CA ad AN, erit AN, CR::NV, CV.

Corollarium Secundum.

Si punctum A sit infra centrum C, erit & punctum V infra centrum, sed supra A (*Fig.* 166, 170), & si punctum A sit supra centrum, erit & V supra centrum, sed infra A (*Fig.* 167); in *Fig.* 168 erit semper punctum V infra A. In *Fig.* 169 si punctum A sit infra C, erit & punctum V infra C, & infra A; & si punctum A sit supra C, erit V supra C, & supra A. In *Fig.* 170 erit semper punctum V supra A.

Corollarium Tertium.

Si in omnibus Figur. hujus Propos. ducatur RQ parallela ad radium refractum NV, producto radio circuli NC in Q, si opus fuerit, erunt similia triangula CNV, CQR; & ideo æqualia rectangula CQ × CV, CN × CR.

Corollarium Quartum.

Æquales erunt semper inter se rectæ QR, AN. Nam per Corollar. Prim. Propos. LXXXIII est CV, CR::NV, NA: ob similitudinem vero triangulorum NCV, CQR est etiam CV, CR:: NV, QR. Ergo NA, QR æquales.

Corollarium Quintum.

Ex dictis punctum refractionis V facile reperietur, si centro R, intervallo AN describatur arcus RQ, qui secet radium circuli CN in aliquo puncto Q, & fiat CQ, CR × CN, CV, erit V punctum quæsitum. Nam ex constructione erunt similia triangula CQR, CNV; igitur NV, VC::QR (seu AN), RC; ergo per Corollar. Prim. Propos. LXXXIII erit NK refractus radius incidentis AN.

PROPOSITIO LXXXIV.

Theorema.

Si e rariori medio in densius, vel contra incidant in convexam, vel cavam circularem superficiem BN (Fig. 171, 172, 173, 174, 175, 176) *radius quilibet* MN *tendens ad punctum* A, *cujus*

jus refractus NV, *& sit ut supra* CA, CR :: I, R, *& fiat* AB, CR :: BZ, CZ, *erit* CV, CZ :: NV × AB, NA × BZ.

Quoniam (per Corollar. Prim. Proposf. præcedentis) est CV, CR :: NV, NA, & est (per hypothesim) CR, CZ :: AB, BZ, erit CV ad CZ in composita ratione NV ad NA, & AB ad BZ, hoc est, erit CV, CZ :: NV × AB, NA × BZ.

Corollarium Primum.

Hoc posito, incidat radius MN e rariori medio in densius in convexam superficiem (*Fig.* 171). Punctum A vel est in circulo, aut peripheria refringente, vel extra; sit primo in peripheria, aut in circulo; ergo ducta secante BNS, angulus ANB erit aut rectus, aut recto minor: quamobrem si fiat VP ad AN parallela, erit VN major VP; ergo VP × AB habebit ad AN × BZ minorem rationem, quam VN × AB ad AN × BZ, & loco VP, AN proportionalia BV, BA subrogando, habebit BV × AB ad AB × BZ, nimirum BV ad BZ minorem rationem, quam VN × AB ad AN × BZ, hoc est (per Corollar. antecedens), quam CV ad CZ; & permutando, ac dividendo habebit BC ad CV minorem rationem, quam BC ad CZ; ergo punctum V intra Z, & A.

Sit nunc punctum A extra circulum, ita tamen, ut angulus VNB sit minor angulo ANS, seu VPN; erit etiam VP minor VN, & eadem ratione punctum V erit infra Z.

Si vero angulus VNB sit æqualis angulo ANS, ducta AS ad VN parallela, erunt æquales inter se AS, AN, & similiter inter se æquales VN, VP, ideoque erit CV, CZ :: NV × AB, AS × BZ; seu: BV × AB, BZ × AB :: BV, BZ; & permutando, invertendo, ac dividendo, erit BC, CV :: BC, CZ; æquales ergo CV, CZ, & punctum V cadet in Z.

Immo vero generatim si fuerit CB æqualis CR, omnes refracti coibunt in puncto Z, quod eodem modo demonstratur, quo demonstratum est Coroll. secund. Proposit. LXXIV; sed loco Coroll. primi Proposf. LXXIII adhibeatur Coroll. prim. Proposf. LXXXIII.

At si punctum A sit extra circulum ita, ut angulus VNB sit major angulo ANS, erit AS minor AN: quamobrem NV × AB ad NA × BZ, hoc est CV ad CZ habebit minorem rationem quam BV ad BZ, & permutando, invertendo, ac dividendo, BC ad CV habebit majorem rationem, quam BC ad CZ, & puncto V supra Z cadet.

Si punctum A, in quod convergunt incidentes radii, sit supra centrum refringentis circuli (*Fig.* 172) erit VS major VN, ideoque habebit VS x AB ad AN x BZ, hoc est BV x AB ad AB x BZ, nimirum BV ad BZ majorem rationem, quam NV x AB ad NA x BZ, hoc est quam CV ad CZ; & permutando, ac componendo, habebit BC ad CV majorem rationem, quam BC ad CZ, & punctum V infra Z.

Corollarium Secundum.

Incidat nunc radius MNA in cavam superficiem BN e rariori medio similiter in densius (*Fig.* 173). Erit, ut supra, CV ad CZ :: NV x AB ad NA x BZ. Ducatur BNS, & sit VS parallela ad AN; erit VS major VN; quamobrem VS x AB ad AN x BZ, seu VB x AB ad AB x BZ, hoc est VB ad BZ habebit majorem rationem, quam NV x AB ad NA x BZ, hoc est quam CV ad CZ; & permutando, ac invertendo, CV ad BV minorem quam CZ ad BZ, & dividendo, CB ad BV minorem, quam CB ad BZ, & punctum V infra Z.

Corollarium Tertium.

Fiat nunc transitus e densiori medio in rarius in convexam superficiem. Punctum A vel est in circulo, aut peripheria, vel extra. Sit primo (*Fig.* 174) extra circulum, aut in peripheria, & ducatur BNS, & AP parallela ad VN. Angulus ANP erit aut rectus, aut recto major; ideoque VNP, seu æqualis APB, recto major, & APN recto minor, & ideo AP major AN. Ergo NV x AB habebit ad AP x BZ minorem rationem, quam NV x AB ad NA x BZ, hoc est quam CV ad CZ; & loco NV, AP proportionalia subrogando, ut supra fecimus, BV, BA, habebit BV x AB ad AB x BZ, hoc est BV ad BZ minorem rationem, quam CV ad CZ; & permutando, ac dividendo, BC ad CV minorem rationem quam BC ad CZ, & punctum V infra Z.

Esto punctum A in circulo, & similiter in circulo, aut in ipsa peripheria punctum V; erit angulus VNB aut rectus, aut minor recto; ergo VNS rectus, aut recto major, ideoque VS major VN. Igitur VS x AB ad AN x BZ, hoc est BV x AB ad AB x BZ, nimirum BV ad BZ habebit majorem rationem, quam NV x AB ad NA x BZ, hoc est quam CV ad CZ, & permutando, ac dividendo, BC ad CV majorem quam BC ad CZ, & V supra Z.

Si existente puncto A in circulo, punctum V sit extra, angulus ANB poterit esse major, aut etiam æqualis angulo VNS. Sit primo major; erit VN major VS; quapropter habebit VS x AB ad AN x BZ minorem rationem, quam NV x AB ad AN x BZ, hoc est quam CV ad CZ; atque ideo BV ad BZ minorem rationem, quam

quam CV ad CZ; & permutando, ac dividendo BC ad CV minorem, quam BC ad CZ, & punctum V infra Z.

Sit angulus ANB minor angulo VNS; erit VS major, quam VN, ideoque eodem ratiocinio BV habebit ad BZ majorem rationem, quam CV ad CZ; & permutando, ac dividendo, BC ad CV majorem quam BC ad CZ, & punctum V supra Z.

Si angulus ANB sit æqualis angulo VNS, erunt VS, VN æquales lineæ; ergo erit CV ad CZ:: VS × AB ad AN × BZ, nempe CV, CZ:: BV, BZ, & permutando, invertendo, ac dividendo, erit BC, CV:: BC, CZ; punctum igitur V cadet in Z.

Immo vero generatim si fuerit CB æqualis CR, omnes refracti coibunt in puncto Z, quod eodem modo demonstratur, quo demonstratum est in Coroll. secund. Propos. LXXIV; sed loco Coroll. primi Proposit. LXXIII adhibeatur Corollar. prim. Proposit. LXXXIII.

Corollarium Quartum.

Sit punctum A supra centrum circuli (*Fig.* 175). Ducta VP parallela ad AN erit minor VN; ergo VP × AB ad AN × BZ, hoc est BV × AB ad AB × BZ, nimirum BV ad BZ habebit minorem rationem, quam CV ad CZ, & punctum V supra Z.

Co-

Corollarium Quintum.

Incidat radius MN tendens ad punctum A in cavam superficiem e densiori medio in rarius (*Fig.* 176). Ducatur VP parallela ad AN, quæ erit minor VN; igitur VP × AB ad AN × BZ habebit minorem rationem, quam NV × AB ad NA × BZ, hoc est BV × AB ad AB × BZ, seu BV ad BZ minorem, quam CV ad CZ; & permutando, invertendo, ac dividendo, CB ad BV majorem, quam CB ad BZ; & punctum V erit supra Z.

Corollarium Sextum.

Erit itaque punctum Z limes, ultra, vel citra quem, habita ratione casuum enumeratorum, nullius incidentis refractus axem intersecabit. Et quia est CA, CR:: I, R, & CR, BA:: CZ, BZ; erit etiam CA, BA:: I × CZ, R × BZ, & R, I:: BA × CZ, CA × BZ, & I, R:: CA × BZ, BA × CZ. Et si arcus NB transeant in lineas rectas, erunt CA, CZ infinitæ, ideoque assumptis ut æqualibus, erit I, R:: BZ, BA.

PROPOSITIO LXXXV.

THEOREMA.

Si ad duo puncta A, *&* P, *quorum illud* A (Fig. 177)

177) *sit a superficie remotius, tendant radii, & tendentium ad A refracti limitem habeant in Z, tendentium ad P refracti limitem habeant in Y, erit limes Y propius ad superficiem NB, quam Z.*

Nam erit (ut Propos. LXXV demonstravimus) AC × BZ, AB × CZ :: PC × BY, BP × CY. Sed BC ad CA habet minorem rationem, quam BC ad CP, & componendo, BA ad CA minorem, quam BP ad CP, & invertendo, CA ad BA majorem, quam CP ad BP. Quapropter habebit BZ ad CZ minorem, quam BY ad CY, & dividendo BC ad CZ minorem, quam BC ad CY; ergo CY erit minor, quam sit CZ. Id autem in uno casu demonstratum singulis convenit.

PROPOSITIO LXXXVI.

THEOREMA.

Obliquioris radii ad datum punctum tendentis e rariori medio in densius incidentis in cavam superficiem (Fig. 178) *refractus radius axem secat infra sectionem rectioris, hoc est, qui incidentes minus distant ab axe, refractos habent minus remotos a puncto* A. *Contra vero si radii incidant e densiori medio in rarius* (Fig. 179) *obliquioris refractus axem secat supra sectionem rectioris, propius ad superficiem refringentem.*

Sint incidentes radii ad punctum A tendentes PM, PN (*Fig.* 178), quorum refracti MK, NL e rariori medio in densius. Ducantur CN, KN, & sit LH ad KN parallela. Erit (per Corollar. prim. Propos. LXXXIII) CK, CR :: MK, MA, & eadem ratione CR, CL :: NA, NL; ergo multiplicando rationes, erit CK × CR, CL × CR :: MK × NA, MA × NL. Est autem KN ad KM in minori ratione, quam AN ad AM (per num. sextum Propos. LXXVI); ergo erit CK × CR, CL × CR in majori ratione quam NK × MK ad NL × MK, hoc est CK ad CL, seu NK ad HL in majori ratione, quam NK ad NL; ergo HL erit minor, quam NL. Est autem angulus CNL obtusus; ergo LH cadit in angulo LNH, atque ideo CL debet esse major CK, & punctum L infra K.

Veniant radii e medio densiori (*Fig.* 179) in rarius. Erit similiter, ut supra factum est, CK × CR, CL × CR :: MK × NA, MA × NL. Sed NK ad MK in hoc casu habet majorem rationem, quam AN ad AM; ergo erit CK ad CL in minori ratione, quam NK × NA ad NA × NL; hoc est KN ad LH habebit minorem rationem, quam NK ad NL; ergo NL erit minor LH. Est autem angulus LNC non acutus; igitur LH cadit intra triangulum, atque

que ideo CL minor CK, & punctum L supra K.

Incidant radii e rariori medio in densius convexa superficie terminatum (*Fig.* 180) & duo puncta A, & K sint in circulo; erit (per numerum quint. Propos. LXXVI) AN ad AM in minori ratione, quam NK ad MK, atque ideo CK ad CL in minori ratione, quam MK × NK ad MK × NL, hoc est quam NK ad NL, nempe NK ad LH in minori ratione, quam NK ad NL; ergo LH est major LN; igitur punctum L infra K.

Sint duo puncta A, & K extra circulum. Erit (per num. quart. Propos. LXXVI) (*Fig.* 181) NA ad NK in majori ratione, quam MA ad MK, atque ideo NA ad MA in majori ratione, quam NK ad MK; ergo erit CK ad CL, hoc est NK ad HL in majori ratione, quam NK ad NL, & HL minor, quam NL; est autem NCL obtusus; ergo punctum L supra K.

Sit punctum A in circulo (*Fig.* 182) & supra centrum C, erit & K in circulo. Est autem (per num. quint. Propos. LXXVI) NK ad NA in minori ratione, quam MK ad MA; igitur NK ad HL majorem rationem habet, quam NK ad NL, & propterea HL erit minor NL, & punctum L infra K.

Sit punctum A extra circulum (*Fig.* 183) alterum K in circulo; sitque præterea CK, CB:: CB,

CB, CA, erit AN, NK:: AM, MK; ideoque NL, HL æquales inter se, omniumque incidentium refracti coeunt in puncto K, seu verius in puncto Z, quod erit punctum singulare.

Si fuerit K centro propius, quam assignata modo analogia postulat, erit AN ad AM in minori ratione, quam NK ad MK, & CK ad CL, hoc est NK ad HL in minori ratione, quam NK ad NL; ergo HL erit major LN, & punctum L infra K. Et si punctum A fuerit a centro remotius, erit NA ad MA in majori ratione, quam NK ad MK; ergo CK ad CL habebit majorem rationem, quam NK ad NL, hoc est NK ad LH majorem, quam NK ad NL; ergo LH erit minor NL, & punctum L supra K.

Incidant radii (*Fig.* 184) e densiori medio in rarius in convexam sphæricam superficiem tendentes ad punctum A supra centrum. Ductis eisdem lineis, erit NA ad MA in majori ratione, quam NK ad MK; igitur CK ad CL, hoc est KN ad LH in minori ratione, quam NK ad NL; ergo LH major, quam NL, & punctum L supra K.

Sit punctum A in circulo, & infra centrum, erit (*Fig.* 185) NK ad NA in minori ratione, quam MK ad MA; ergo erit NK ad HL in majori ratione, quam NK ad NL, & HL minor NL; ergo punctum L supra K.

Sit punctum A extra circulum (*Fig.* 186) erit NK ad NA in majori ratione, quam MK ad MA; ergo erit NK ad HL in minori ratione, quam NK ad NL, & HL major NL, & punctum L infra K.

Si punctum A sit in circulo, & K extra, ita ut habeatur analogia CA, CB::CB, CK, erit AN, NK::AM, MK, & HL, NL æquales inter se, omniumque incidentium refracti coibunt in puncto K, seu verius in puncto Z, quod erit punctum singulare.

PROPOSITIO LXXXVII.

THEOREMA.

Sumptis æqualibus arcubus ON, NM, MB (Fig. 187, 188), *incidentium radiorum* PO, PN, PM *ad punctum* A *tendentium sint refracti* OK, NL, MX. *Ad hos refractos ducantur a puncto* R *parallelæ* RQ, Ru, Rr; *& centro* C, *intervallis* Cu, Cr *describantur arcus* ua, rb; *erit* Qa *ad* ab *in majori ratione, quam* CQ *ad* Cr, *sive incidant radii in convexam superficiem a rariori medio in densius, sintque puncta* K, L, X, A *extra circulum* (Fig. 187); *sive radii incidant in concavam superficiem a densiori medio in rarius*, (Fig. 188).

Rectangula CQ×CK, Cu×CL, Cr×CX, quia

quia singula eidem rectangulo constanti CB×CR æqualia sunt (per Coroll. tert. Propos. LXXXIII) inter se etiam sunt æqualia. At per Propos. LXXXVI rectæ CX, CL, CK sunt decrescentes; ergo etiam earum reciprocæ CQ, Cu, Cr decrescentes erunt. Sunt autem æquales anguli rCu, uCQ. Ergo per hæc tria puncta circulo descripto, rectæ CQ, Cu, Cr cadent in eamdem circuli partem a centro; & per Propos. LXXVIII erit Qa ad ab in majori ratione quam CQ ad Cr.

PROPOSITIO LXXXVIII.

THEOREMA.

Eadem posita constructione, erit semper intercepta KL *major* LX.

Hæc Propositio eodem ratiocinio demonstratur, quo demonstrata fuit Propos. LXXX.

Reliquos non persequor casus, ne nimius sim; hi quippe sponte se produnt.

PROPOSITIO LXXXIX.

PROBLEMA.

Dato puncto A, *in quod convergant radii e rariori medio in densius* (Fig. 189), *& dato in axe* AG *puncto* K, *incidentem radium in convexum circulum* NB *invenire, cujus refractus transeat per punctum* K.

Sit

Sit CA, CR::I, R, & fiat CK, CR:: KG, AG; item fiat CK, CR, hoc est KG, AG::GF, FA; centro F, intervallo FG circulus describatur refringentem secans in N, ducta NK incidentis NA erit refractus radius NK.

Demonstratio eadem est, quæ Propos. LXXXII; sed loco Coroll. primi Propos. LXXIII, adhibeatur Coroll. prim. Propos. LXXXIII.

PROPOSITIO XC.

PROBLEMA.

Si radii ad punctum aliquod covergentes in sphæram incidant, refractorum extra axem sibi quamproximorum, & in eodem plano cum incidentibus jacentium concursum determinare.

Eadem omnino adhibeatur huic casui constructio, qua usi sumus in Propos. LXXXI, cui similiter eadem demonstratio congruit, & factum erit, quod quæritur.

Sed non ante hujus lectionis finem faciam, quam Problema solvam multo generalissimum, pleraque eorum, quæ soluta dedimus, simul complectens. Est autem hujusmodi.

PRO-

PROPOSITIO XCI.

PROBLEMA.

Si radii seu paralleli, seu a puncto emanantes, seu in punctum quoddam tendentes a rariori in densius, vel a densiori in rarius medium sphærica superficie vel convexa, vel cava terminatum incidant, refractorum axi quamproximorum concursum, sive focum determinare.

Sit A punctum radios ejaculans (*Fig.* 190, 191) versus sphæricam convexam superficiem BNP, cujus centrum C, e rariori medio in densius, pro ut punctum concursus est ultra, aut infra B secundum Coroll. Propos. LXXIII, aut e densiori medio in rarius (*Fig.* 192); vel ejaculans in cavam e rariori medio in densius (*Fig.* 193), aut e densiori in rarius (*Fig.* 194, 195), pro ut concursus est ultra, aut infra A, secundum Propos. LXXIII; vel denique tendant radii FA ad punctum A in sphæricam convexam superficiem e rariori medio in densius (*Fig.* 196), aut e densiori in rarius (*Fig.* 197), vel in concavam e rariori medio in densius (*Fig.* 198), aut e densiori in rarius (*Fig.* 199),

A vertice B superficiei, & centro C erige perpendiculares BH, CI, ipsisque occurrentem in H, & I, age per punctum A quamlibet AI. Tum a puncto C versus I cape CR, quæ sit ad

CI

CI in ratione refractionis, & age rectam HR occurrentem rectæ AC in Z, erit Z quæsitum punctum.

Sit enim AN radius axi infinite proximus occurrens CI in K. Age NZ occurrentem CI in *g*, &, ut mos est, concipe infinite parvum arcum BN æqualem esse segmento BM rectæ BH ad radium AK terminato. Erit CI, BH :: CK, BN, & BH, CR :: BN, C*g*; ergo ex æquo CI, CR :: CK, C*g*; hoc est, erit CK ad C*g* in ratione refractionis. At cum anguli CAK, CZ*g* sint infinite parvi, erunt CK ad AN, uti & C*g* ad NZ veluti perpendiculares; vel saltem perpendicularibus æquipollentes; quamobrem erit NZ refractus radius incidentis AN (per Coroll. Proposit. XI).

Corollarium.

Posito, ut factum est, I ad R, ut est sinus incidentiæ ad sinum refractionis, erit $\frac{I}{R}$ AB, AC :: BZ, CZ. Est enim $\frac{I}{R}$ AB, AB :: I, R :: CI, CR; & AB, AC :: BH, CI; igitur ex æquo perturbate $\frac{I}{R}$ AB, AC :: BH, CR :: BZ, CZ. Quamobrem si punctum A infinite distet, seu parallelos radios ejaculatur; tum, propter æquales BH, CI, erit CI, CR :: BZ, CZ, hoc

hoc est I, R :: BZ, CZ, quod vidimus etiam Proposit. LXVI. Atque rursus si paralleli sint refracti radii, tum propter æquales BH, CR, erit I, R :: AC, AB.

L E-

LECTIO DECIMATERTIA.

SImplicis refractionis leges ſatis ; ut arbitror , vidimus Lectionibus ſuperioribus ; nunc autem diſpiciendum nobis eſt , quæ leges ſint in repetitis pluries refractionibus , in quibus eos ſolum radios ad rem noſtram facientes , in conſiderationem vocabimus , qui axi propiores incedunt.

PROPOSITIO XCII.

PROBLEMA.

Focum , ſeu concurſum determinare radiorum a lente ſphæricis , ſeu circularibus ſegmentis terminata refractorum .

Triplex caſus eſſe poteſt ; vel enim radii incidunt in lentem paralleli (*Fig.* 200 , 201) ; vel egredientes a puncto , ſive poſtea ex prima refractione convengant (*Fig.* 202), ſive divergant (*Fig.* 203) ; vel incidunt in lentem ad punctum quodvis convergentes (*Fig.* 205) . Pro quovis autem caſu una , & eadem eſt conſtructio .

Sit lens GBOD , axis KC , centrum arcus GBO ſit C , arcus GDO ſit K . Erigantur a centris C , K , & a verticibus B , D normales CI , K*i* , BH , DQ ad axem ; deinde ducatur

quæ-

quævis recta AHI parallela ad axem , ſi quidem radii incidant paralleli ; ſi ſecus , ducatur a puncto A luminoſo in quovis angulo ſecans BH, & CI in H , & I , & ſumantur CI, & CR in ratione refractionis , nempe ut I ad R , & agatur recta RH ſecans DQ , & K*r* in Q , & *r* ; deinde fiat K*r* ad K*i* in eadem ratione refractionis , nempe ut I ad R , ſitque K*i* major quam K*r* , quia ſecunda refractio fit a denſiori medio in rarius , & agatur *i*Q , hæc producta ſecabit axem in aliquo puncto Y , quod erit quæſitus focus , ſeu punctum concurſus , aut diſperſus radiorum refractorum .

Nam incidant radii primo paralleli (*Fig.* 200 , 201) ; erit I , R::BZ , CZ , & (per Coroll. prim. Propoſ. LXVI) incidentes ad axem propinquiores , de quibus eſt ſermo , ex prima refractione axem ſecabunt in Z ; datum igitur habetur punctum Z , in quod convergunt radii poſt primam refractionem . Eſt autem K*r* , DQ:: KZ , DZ , & DQ , K*i*: DY , KY ; igitur ex æquo K*r* , K*i*::KZ × DY , DZ × KY : at eſt K*r* , K*i*:: I , R ; ergo I , R::KZ × DY , DZ × KY , & (per Coroll. ſext. Propoſ. LXXXIV) erit in Y quæſitum punctum . Fiat igitur primo I , R::BZ , CZ , ſeu I — R , R::BC , CZ , & habebitur punctum Z ; deinde ex analogia I , R::KZ × DY , DZ × KY , eruitur hæc altera $\frac{R}{I}$ × KZ , DZ::KY , DY , ſeu $\frac{R}{I}$ × KZ — DZ,

DZ

DZ::DK, DY, & punctum Y innotescet.

Sit lens plana ad partes K. Quoniam in ipsam perpendiculares incidunt radii, erit prima refractio nulla, & puncta C, & Z ad infinitam distantiam, puncta vero *r*, Q, R in ipsa AH inveniuntur; est autem K*r*, seu DQ, seu BH ad K*i*, hoc est I, R::DY, KY; igitur (per Corollar. prim. Propos. LXVI) erit Y quæsitum punctum.

Si lens sit vitrea, quia ratio sinuum est sesquialtera, erit DY dupla KD, seu æqualis diametro.

Sit lens plana ad partes D. Ex prima refractione radii axem secant in Z (per Coroll. prim. Propos. LXVI). Est porro ex constructione I, R:: KZ × DY, DZ × KY; sed KZ, & KY, quia infinitæ, ut æquales assumi possunt; igitur erit I, R::DY, DZ, & (per Propos. XXVII) Y quæsitum punctum.

Notandum vero est in secundis refractionibus cunctis I esse minorem, quam R.

Sit lens concavo-concava (*Fig.* 201), constructio eadem est, quæ in *Fig.* 203, sed quoniam per utramque refractionem radii divergentes fiunt, arcus circulorum sumendi sunt inverse. Post primam refractionem (per Propos. LXVI) punctum erit in Z. Est vero (per constructionem) I, R::KZ × DY, DZ × KY; ergo (per Coroll. quint. Propos. LXXIV) punctum Y erit quæsitum.

Si

Si lens sit plana ad partes C, & concava ad partes K, erit prima refractio nulla, nimirum KZ, DZ erunt infinitæ, atque ideo æquales; & I, R::DY, KY, & (per Propos. LXVI) Y quæsitum punctum.

Si sit plana ad partes K, & concava ad partes C, erit (per Prop. LXVI) Z punctum primæ refractionis, & KZ, KY erunt infinitæ, & æquales; igitur I, R::DY, DZ, & (per Propos. XIX) punctum Y quæsitum.

Si lens sit convexa ad partes B, & concava ad partes D, vel concava ad partes B, & convexa ad partes D, punctum Z esse poterit vel ultra, vel infra K; quomodocumque sit, punctum Y erit semper in ea axis parte a lente, in qua est K, verumtamen seu ultra, seu infra K, dummodo tamen sit productum I × DZ majus producto R × KZ. Si secus sit, & punctum Z sit extra spatium CK, punctum Y erit lenti adversus, id est ad partes adversas. Id autem facile ex secunda formula apparet. Si punctum Z hujusmodi sit, ut post primam refractionem habeatur R, I::DZ, KZ, punctum Y erit infinite distans. Hujusmodi vero observationes, & determinationes in omnibus sequentibus casibus fieri nullo negotio possunt; si in formulis eæ modificationes adhibeantur, quæ singulis casibus conveniunt, quod hoc loco fecisse satis est; non enim necesse putamus omnia persequi.

Si

Si punctum Z cadat inter C, & K, fiat DZ $\div \frac{R}{I} \times KZ$, DZ::DK, DY. Si punctum Z cadat extra CK, & sit DZ major, quam $\frac{R}{I} \times KZ$, fiat $DZ - \frac{R}{I} \times KZ$, DZ::DK, DY. Et si DZ sit minor, fiat $\frac{R}{I} \times KZ - DZ$, DZ::DK, DY.

Sit integra sphæra. Erit KZ eadem, atque CZ, & KY eadem atque CY; igitur BH, CR::I, R::BZ, CZ, & formula secunda erit I, R::$CZ \times DY$, $DZ \times CY$, & (per Coroll. sext. Prop. LXXXIV) punctum Y erit quæsitum. Fiat ergo CD, DY::$\frac{R}{I} \times CZ - DZ$, DZ, seu $\frac{R}{I} \times CZ - DZ$, DZ::CD, DY.

Procedant a puncto A divergentes radii in convexo-convexam lentem (*Fig.* 202, 203); est (per constructionem) CI, BH::CA, BA, & BH, CR::BZ, CZ, ideoque CI, CR, seu I, R::$CA \times BZ$, $BA \times CZ$; itaque post primam refractionem (per Coroll. quint. Proposit. LXXIV) refracti radii axem secarent in Z. Hinc porro eadem formula habebitur, quæ est supra; I, R::$KZ \times DY$, $DZ \times KY$, ideoque (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV) (vel per Corollar. quint. Propos. LXXIX) erit Y quæsitum punctum.

As-

Assumpta itaque prima formula, fiat $\div$ AB $\div \frac{R}{I} \times AC$, AB::BC, BZ, & dabitur punctum Z. Assumpta secunda, fiat $\frac{R}{I} \times KZ - DZ$, DZ::KD, DY. Verumtamen hujusmodi puncta, ratione positus puncti A, & magnitudinis radiorum circulorum poterunt esse aut ad unam, aut ad alteram partem comparate & ad lentes, & ad punctum A, quod superiora theoremata docebunt. In his casibus aliqua correctio duabus posterioribus analogiis adhibenda erit, quod cuique facile rem tractanti patebit.

Sit lens plana ad partes K; erunt CA, CZ infinitæ, & prima formula primæ refractionis erit I, R::BZ, BA, & (per Coroll. secund. Propos. XIX) refractus radius axem secabit in Z; post alteram refractionem formula erit eadem; ergo Y quæsitum punctum (per Coroll. quint. Propos. LXXIV) & puncta Z, & Y erunt ad partes puncti A.

Sit lens plana ad partes C; erunt KZ, KY infinitæ. Prima formula post primam refractionem erit eadem; secunda vero erit I, R::DY, CZ, & (per Propos. XXVII) Y quæsitum punctum.

Sit lens concava ad partes B, & convexa ad partes D. Prima formula dabit punctum Z (per Coroll. quint. Propos. LXXIV), secunda dabit punctum

ctum Y (per idem Coroll.) est enim eadem ac prima .

Sit lens convexa ad partes B , concava ad partes D . Prima formula dabit punctum Z (per idem Coroll.) ; secunda dabit punctum Y (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV , vel per Corollarium quint. Propos. LXXIV) .

Sit lens concavo - concava . Eadem erit formula , & constructio , dummodo puncto A manente reliqua omnia puncta invertantur , ut in *Fig.* 204 .

Si lens sit plana ad partes C , & concava ad K (*Fig.* 204) , erunt CA , CZ infinitæ , atque ideo æquales , & prima formula erit post primam rafractionem I , R :: BZ , BA ; post alteram refractionem secunda formula erit eadem .

Si lens plana ad partes K ; erunt KZ , KY infinitæ , atque ideo æquales ; quamobrem prima formula eadem ; secunda erit I , R :: DY , DZ .

Sit lens plano - plana , erunt AC , CZ , & KZ , KY infinitæ , & æquales , & formula post primam refractionem erit I , R :: BZ , BA ; post secundam I , R :: DY , DZ .

Sit integra sphæra ; erit KZ eadem , atque CZ , & KY eadem , atque CY ; igitur prima formula erit eadem ; secunda vero I , R :: CZ $\times$ DY , DZ $\times$ CY , & per Corollar. sext. Proposit. LXXXIV) Y quæsitum punctum .

Nonnunquam accidere potest , ut vel punctum Z , vel Y infinite distent a lente , quod opportune determinatæ per demonstrata theoremata duæ formulæ , seu analogiæ satis indicabunt ; non enim opus est singulos casus recensere .

Incidant in lentem sphæricam radii ad punctum A directi (*Fig.* 205) ; erit prima formula (per constructionem) I , R :: CA $\times$ BZ , BA $\times$ CZ , & Z punctum quæsitum post primam refractionem (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV) . Fiat ergo $\frac{I}{R} \times BA - CA , CA :: BC , CZ$. Post secundam erit formula I , R :: KZ $\times$ DY , DZ $\times$ KY , & (per idem Coroll.) punctum Y quæsitum . Fiat autem $KD , DY :: \frac{R}{I} \times KZ - DZ , DZ$.

Sit lens plana ad partes B , erunt CA , CZ infinitæ , & prima formula I , R :: BZ , BA , & (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV) Z punctum quæsitum post primam refractionem ; secunda formula eadem superior , & (per idem Coroll.) Y quæsitum punctum .

Sit lens plana ad partes D ; erit prima formula eadem , & Z punctum quæsitum post primam refractionem . Sunt autem KZ , KY infinitæ , & æquales ; ergo secunda formula erit I , R :: DY , DZ , & (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV) Y quæsitum punctum .

Sit lens concavo - concava , habebuntur eædem ana-

analogiæ, & puncta Z, & Y erunt quæsita (per Corollar. sext. Propos. LXXXIV) quæ puncta erunt simul ad eamdem partem, & ultra punctum A.

In casu lentis concavo-concavæ (*Fig.* 204) & radiorum ad punctum A tendentium, punctum Y poterit esse aut ad partes A, & dabit punctum concursus; aut contra ad partes C, & erit punctum dispersus; aut infinite distans, prout fuerit DQ, aut minor, aut æqualis K*i*. Fiet porro Y punctum dispersus, si existentibus DQ, K*i* æqualibus, longius paullo ab A removeatur lens; nam tum quanto crescit DQ, tanto crescit K*r*, & crescente K*r*, crescit eodem tempore *ri*, atque ideo fit tandem K*i* major DQ, & punctum Y transit ad partes C, fitque punctum dispersus.

Sit lens plana ad partes K; erunt CA CZ infinitæ, & I, R::BZ, BA, & Z punctum quæsitum post primam refractionem (per Corollar. sext. Propos. LXXXIV); & Y post secundam refractionem (per idem Coroll.)

Si lens sit plana ad partes C, erit I, R:: CA × BZ, BA × CZ, & punctum Z quæsitum (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV). Et quia KZ, KY sunt infinitæ, erit secunda formula I, R::DY, DZ, & punctum Y quæsitum (per idem Corollar.).

Sit lens concava ad partes B, convexa ad partes

tes D, vel convexa ad partes B, & concava ad partes D, prima eadem formula dabit punctum Z, secunda punctum Y (per Coroll. sext. Propos. LXXXIV).

Sit integra sphæra; prima formula erit eadem, & quia KZ eadem est, atque CZ, & KY eadem atque CY, secunda formula erit I, R:: CZ × DY, DZ × CY.

PROPOSITIO XCIII.

PROBLEMA.

Data lentis distantia BY *a puncto* Y, *crassitie* BD *lentis, & alterutro circulorum lentem constituentium, ut* GBO, *cujus centrum* C, *invenire centrum* K *alterius circuli* GDO *lentem constituentis ita, ut imago puncti* A *sit in puncto* Y (Fig. 206).

In punctis B, D, C erigantur ad axem perpendiculares BH, DQ, CI, & per punctum A ducatur recta quævis API secans BH, & CI in P, & I, ac fiat CI, CR::I, R, & agatur RPZ secans DQ in Q, & axem in Z; fiat præterea DQ, DS::R, I, & sit DQ major DS, quoniam secunda refractio a densiori medio fit in rarius, & agatur SY secans RZ in V, ac demittatur normalis VK: erit KD radius quæsitus circuli.

 Est

Est enim (per constructionem) I, R::CA × BZ, BA × CZ; ergo post primam refractionem (per Coroll. quint. Propos. LXXIV) punctum Z erit focus imaginarius. Et quoniam DQ, KT sunt parallelæ, erit KT, KV::DQ, DS::R, I; ergo quia anguli incidentiæ, & refractionis considerari in hoc casu debent, ut infinite parvi, assumi poterit KT ut perpendicularis ad QY, & KV ut perpendicularis ad QZ, nempe ut sinus angulorum incidentiæ, & refractionis, ideoque Y erit focus; quapropter K centrum quæsiti circuli GDO.

Scholion Primum.

Hisce positis nullo negotio cum Myopis, tum Presbitis consulitur. Dicuntur autem Myopes illi, qui remota longius objecta confuse cernunt, propius admota distincte vident. Presbitæ vero contra. Pro illis ergo huc spectat negotium, ut lens concavo-convexa construatur, quæ tali ratione refringat radios, ut post refractiones ita divergant, ac si a puncto aliquo procederent, quod minus ab oculo remotum sit, quam objectum. Locus objecti sit in A (*Fig.* 207), & Z sit punctum, in quo si esset objectum, illud oculus Myopis optime videret. Esto igitur quæsitæ lentis concava superficies, seu circulus EBH, cujus centrum C, & Z punctum dispersus. (Ex Coroll. quint. Propos. LXXIV) erit I, R:: CA

CA × BZ, BA × CZ; factum est autem ibidem I, R::CA, CR; porro (per Coroll. secund. Propos. LXXIV) omnes omnino refracti coibunt in Z, si sit CB æqualis CR; igitur loco CR substitue CB, & erit CA, CB::CA × BZ, BA × CZ, hoc est BA, BZ::CB, CZ. Quapropter fiat I—R, R::AZ, ad quartam ZB, & secetur ZB in C, ut sit BC, CZ::I, R, tum centro C, intervallo CB, circulus describatur EBH, ac centro Z, intervallo ZD paulo majore, quam ZB, alius circulus MDN, & habebitur quæsita lens. Nam quia est (per constructionem) I—R, R::AZ, BZ, erit, componendo, I, R (hoc est CA, CB)::AB, ZB; & quia est etiam I, R (hoc est CA, CB)::CB, CZ, erit AB, BZ::CB, CZ. Porro secunda refractio nulla est, quia radii a puncto Z sunt ad circulum MDN perpendiculares; igitur Myops objectum videbit perinde, atque si situm esset in Z, ideoque prorsus distincte, & perfecte. Si vero (*Fig.* 208) ad distinctam, perfectamque habendam visionem objecti A opus sit, ut imago longius projiciatur ab oculo, quam sit objectum, quod Presbitum incommodo medetur, ita fiat. Sit MDN circulus, cujus radius utcumque CD, objectum in A, distantia quæsita imaginis DZ. Per superius recensita Corollaria habebitur similiter analogia CA, CD::CA × DZ, DA × CZ; hoc est DA, DZ::CD, CZ; hinc si si fiat R—I, I::AZ, AD, & dividatur ZD in C, ut sit DC, CZ::I, R, ac centro C, intervallo CD describatur circulus MDN; tum centro A, intervallo AB paullo minore, quam AD, alter circulus MBN: quoniam radii a puncto A manantes sunt ad circulum MBN perpendiculares, prima refractio nulla est; ex secunda vero refractione, quia est R—I, I::AZ, AD, erit etiam, componendo R, I::ZD, AD; at est etiam R, I::CZ, CD; ergo erit DZ, AD::CZ, CD, & DA, DZ::CD, CZ. Igitur Presbitæ objectum videbunt perinde, ac si situm esset in Z; ideoque prorsus distincte. Id vero præstari etiam potest per lentem convexo-convexam, cujus major erit, aut minor convexitas pro majori, aut minori requisita distantia AZ; ac ratio hæc ad usus præstat cæteris ob majorem facilitatem lentium construendarum. Haberi quoque idem potest per lentem plano-convexam, vel convexo-planam. Item Myopi juvari potest per lentem concavo-convexam, vel concavo-planam, aut plano-concavam.

Scholion Secundum.

Ex hactenus traditis Theorematibus inferre fortasse quis poterit, objectum aut per reflexionem, aut per refractionem videri in eo loco, quem locum imaginis diximus, videlicet in ea axis parte, in qua incidentium radiorum reflexi, aut refracti se decussant, & ubi refertissimi sunt; quod quidem id postulat, ut hujusmodi pars, seu punctum oculo anterius sit, a quo divergentes radii in oculum sint directi. At si per lentem refracti, aut per speculum reflexi radii in oculum paralleli, aut convergentes incidant, aut nuspiam, aut post oculum erit eorum concursus, quo in loco videri imaginem, absurdum est; quamobrem aut omnino non videretur, aut ad infinitam distantiam. Verumtamen & videtur imago, & ad distantiam finitam; admodum tamen confuse. Sit lens (*Fig.* 209) aut speculum sphæricum (*Fig.* 210) CBD, punctum radians A, axis AB, & Z focus, seu punctum concursus. Statuatur oculus intra B, & Z. Radii in oculum convergentes incedunt; quapropter nusquam esse deberet imago puncti A, quod tamen revera videmus, & omnino anterius; nam ab ea parte impressio in sensorium, fit, & urgetur, a qua procedentes radii oculum afficiunt, & ita videmus, ut si oculus sit in B, ad eam fere distantiam appareat, ad quam apparet oculo nudo. Si vero oculus sit in N, propius apparet punctum A, & confusio est major, & sic porro oculo in M, P, constituto propius indesinenter accedit punctum A, ut tandem in meram confusionem abeat.

Hujus rei, ut ratio aliqua reddatur, illud animadvertendum est, tum distinctam objecti alicucujus visionem haberi, seu distincte ab animo objectum percipi, cum illius imago distincta, in retina, seu in oculi fundo pingitur, si secus, confuse. Esto oculus NP (*Fig.* 211) recte a natura constitutus, & in naturali statu; punctum radians A, ejusque ab oculo distantia talis, ut refracti radii a cristallino CB coeant in fundo oculi in foco, seu puncto F; quod cum de quovis objecti alio puncto comparate ad aliud retinæ punctum habeatur, hinc oritur distincta imago.

At si radians punctum A propius ad oculum accedat (*Fig.* 212) fit (per superius demonstrata) remotior focus F, ut non in retina, sed ultra sit, quo fit, ut puncti A radii non punctum, sed partem in retina obtineant, in quam partem cum nonnullorum aliorum objecti punctorum radii similiter incidant, oritur confusio imaginis: at si objectum magis ab oculo removeatur (*Fig.* 213) quam ut in *Fig.* 211, & multo magis, si per interpositam lentem HI radii in oculum paralleli, aut convergentes incidant, focus F erit infra retinam, & in ipso oculo, atque ideo confusa imago objecti.

Videtur itaque, seu confuse, seu distincte objectum, quia, quomodocumque in oculum incidant radii, aliquo tamen modo sensorium afficiunt. Illud tamen experientia comprobatum, apertumque est, parallelos radios in oculum incidentes perfectam, distinctamque visionem efficere.

De

De objecti confusione in allato casu audistis; de distantia illius sic habetote. A pueris constanti perpetuaque experientia edocti sumus, objectum quodvis in ea ab oculo distantia situm, quæ ad pupillæ diametrum sensibilem rationem habeat, si propius admoveatur, majori confusione videri, & sic porro majori, quo propius accedit, quod cum quotidie ab ipso nostri ortu accidere videamus, fit, ut mens nostra connexionem quamdam statuat inter varios gradus confusionis objecti, & ejus distantiæ ita, ut nolentes etiam judicium feramus de majori distantia, ubi minor confusio, & contra, quemadmodum ex habitu, & colore mutabili vultus, de animi affectionibus judicamus, quoniam cum illo oris habitu eas animi passiones sociatas semper esse cognovimus.

Cæterum ad judicium ferendum de objecti visibilis magnitudine, & distantia plures aliæ causæ concurrunt, quæ quidem negligi minime debent; at quoniam ad Physicam potius, & fortasse etiam ad Metaphysicam spectant, libens prætereo, pauca perstrinxisse contentus, quæ propius Mathematicam attingunt.

At dicet fortasse quis, ab oculo nudo, & bene a natura constituto objecta intra quosdam propinquitatis, & distantiæ limites posita æque clare, & distincte videri, licet intra hos limites alia, atque alia assumatur distantia, neque inde ori-

oriri, ut majorem diſtantiam ſequatur minor obſcuritas. Huic vero incommodo, quod cæteroquin non effugeremus, ſatis ſapienter proviſum eſt a natura, quæ oculum fabricata eſt tali ratione, ut intra eoſdem limites ſatis commode ſe conſormare poſſet ad alias, atque alias diſtantias, ſive oculi exteriorem figuram in majorem, aut minorem pro re nata ſphæroicitatem adducendo; ſive lentem cryſtallinam, aut verſus fundum, aut verſus pupillam movendo, ſive oculi fundo remotius, aut propius ad cryſtallinum conſtituto.

LECTIO DECIMAQUARTA.

DE refractionibus radiorum a punctis procedentium plura diximus; hæc ipſa nunc transferamus ad objecta finitæ magnitudinis.

PROPOSITIO XCIV.

THEOREMA.

Si objecti cujuſdam, cujus extrema puncta parum inter ſe diſtent, ut AB (Fig. 214) *in lentem incidant radii, ſive paralleli, ſive divergentes, ſive convergentes, eorum puncta omnia ſive concurſus, ſive diſperſus eamdem fere diſtantiam habent a lente tum poſt primam, tum poſt utramque refractionem.*

Incidant radii primum paralleli (*Fig.* 214) in ſphæricam ſuperficiem AB, cujus centrum C, axis primarius AZ. Fiat AZ, CZ::I, R; erit (per Coroll. prim. Propoſ. LXVI) Z punctum concurſus. Intelligatur eodem centro C intervallo CZ ſuperficies ſphærica cava ZQ; & per eamdem Propoſ. erit ſimiliter Q concurſus refractorum incidentium eorum, qui ſunt ad ICQ paralleli.

Porro si a puncto aliquo, ut M, manantes radii, vel in id tendentes sint (*Fig.* 215, 216) inveniatur (per Coroll. quint. Propos. LXXIV, & Coroll. sext. Propos. LXXXIV) punctum concursus Z, quo facto ad idem centrum C intelligantur descriptæ superficies sphæricæ, seu circuli ZQ, erit similiter Q concursus refractorum eorum, qui sunt circa KCQ.

Hoc posito, sit jam nunc lens utrimque convexa ON (*Fig.* 217) axis AC, circulorum centra C, & G. Radiorum a puncto A procedentium concursus post primam refractionem sit Z, post secundam sit V. Ducatur recta BC superficiem ON secans in N ad rectos angulos, in qua BC producta inveniatur punctum S, in quod post primam refractionem conveniunt radii ex B procedentes, quod punctum B tantumdem distat a superficie ON, ac punctum A, & erunt distantiæ CZ, CS æquales. Jungatur SG, quæ erit ad superficiem QM perpendicularis, ideoque erit in SG concursus radiorum post secundam refractionem, qui (per superiora theoremata) inventus sit in L. Porro si puncta Z, & S æqualiter distarent a superficie QM, a qua radii ad Z, & S directi franguntur, etiam V, & L æqualiter distarent a superficie QM; at QS, MZ sunt fere æquales; ergo & distantiæ LQ, VM sunt fere æquales. Rectæ vero AB, VL, quia minimæ assumuntur, & puncta L, V æqualiter a lente distabunt, & AB, LV haberi poterunt, tamquam ad axem AZ normales.

Hæc autem facile ad cavas quoque lentes, & ad eas, quæ alteram superficiem planam habent, omnemque casuum diversitatem transferri possunt.

Illud porro proclive est videre, quod foramini opposita lente, quæ refractos radios in tenebricosum locum projiciat, in opposito ad debitam distantiam pariete externorum objectorum imagines admodum clare, & distincte cernuntur pictæ. Quoniam vero punctum S est focus radiorum a puncto B procedentium, & Z focus procedentium a puncto A, hinc fit, ut per lentem convexam in illius foco objecti imago inverso ordine pingatur.

PROPOSITIO XCV.

LEMMA.

Sint duo triangula MLE, NLF, *vel ad verticem posita, ut in* Fig. 218, *vel unum altero adhærescens, ut in* Fig. 219, *quæ habeant latera* EM, EL *proportionalia lateribus* NF, FL, *&* *puncta* M, L, N, *&* F, L, E *sint in eadem recta, dico lineas* EM, NF *esse parallelas.*

Si negas, a puncto E age E*m* ad NF parallelelam. Per constructionem similia sunt triangula EmL, FNL; quamobrem Em, $EL::NF$, FL; sed etiam per hypothesim est EM, $EL::NF$, FL; ergo Em æqualis erit EM; q. e. o.

PROPOSITIO XCVI.

THEOREMA.

In omni lente, aut utrimque convexa, aut utrimque cava, punctum quoddam est intus, per quod radius quilibet transiens ante, & post lentem sibi parallelus incedit. In Menisco autem, & in lente illa, quæ minori cavo, quam convexo constat, punctum hujusmodi extra lentem ad partem sphæræ minoris reperitur.

Sint hujusmodi lentes BD (*Fig.* 220, 221, 222, 223) quarum superficies una descripta sit centro E, radio ED, altera centro F, radio FB majori, & jungatur FE, quæ secet lentem in B, D. Si fiat FB, $ED::BL$, LD, sumaturque punctum L in linea BD, intra lentem quidem, si sit utrimque convexa, aut cava, extra lentem vero ad partes sphæræ minoris in menisco, & reliquo casu: Dico radium quemlibet, qui ita lentem penetret, ut pars ejus MN intra lentem contenta transeat per punctum L, vel ad ipsum dirigatur, sibi ipsi ante ingressum, & post regressum ex lente parallelum ferri, hoc est esse

esse PN parallelam ad MO.

Jungantur FN, EM, & ducantur tangentes in punctis N, M. Quia (per hypothesim) est FB, $ED::BL$, LD, erit, permutando, FB, $BL::ED$, LD; igitur & FB, seu NF, $LF::DE$, seu ME, LE, & anguli ad L æquales sunt; igitur parallelæ inter se rectæ FN, EM (per Lemma superius); hæ autem sunt ad tangentes in punctis N, M perpendiculares; ergo & tangentes, seu plana per ipsas ducta inter se parallela. Quapropter cum radius NM æqualibus angulis ad plana illa inclinetur; æquali angulo flectitur, ubi lentem ingreditur, & ubi egreditur, hoc est, angulus PNM æqualis angulo NMO, qui cum sint alterni, erunt PN, MO parallelæ.

Eadem demonstratio lenti convexo-cavæ æqualis utrimque curvaturæ applicata radios omnes axi, vel parallelos, vel obliquos recte transire, nec directionem immutare ostendit.

PROPOSITIO XCVII.

THEOREMA.

Imago objecti AB (Fig. 24) *post lentem convexam* FE *in plano depicta est ad objectum* AB, *secundum diametros, in ratione distantiæ* Ld *imaginis a lente ad distantiam* LD *objecti*.

Quod-

Quodlibet objecti punctum per totam lentem EF radiat; igitur radius unus ex A, qui per punctum L superiori Propositione determinatum transeat, cujus refractus L*a*, erit incidenti AL parallelus. Eodem modo radius aliquis L*b* erit parallelus ad BL; quamobrem, non considerata lentis crassitie, AL, & L*a*, itemque BL, & L*b* pro una recta haberi poterunt; quare cum AB, *a b* sint parallelæ, & æquales sint anguli ad verticem L, triangula ALB, *a*L*b* sunt similia; ergo erit *ba*, BA::*d*L, DL.

PROPOSITIO XCVIII.

Theorema.

Si in densiori medio AE (Fig. 225) *plana superficie* AB *terminato sit objectum* MN, *quod bifariam, & normaliter secet in* E *axis* PAE, & *sit in axis puncto* D *oculus, sumaturque in axe punctum* P *hujusmodi, ut radius aliquis* DB *prodiens ita refringatur in* B, *ut pergat tamquam veniens ex* P, *objectum videbitur primo situ erecto, secundo auctum magnitudine, tertio & ita, ut apparens magnitudo ad veram rationem habeat compositam ex ratione distantiæ puncti* P *a superficie ad distantiam* DA *oculi a superficie, & ratione distantiæ* DE *oculi ab objecto ad distantiam* PE *objecti a puncto* P, *si objectum propinquum sit; si vero longinquum, erit magnitudo apparens ad veram, ut distantia* PA *inter superficiem, & punctum* P *ad distantiam* DA *inter superficiem, & oculum.*

Ducatur recta NP superficiem secans in B, & jungatur BD. Quoniam ex D prodeuntes radii ita inflectuntur in B, ut pergant tamquam venientes ex P, vicissim qui ad P tendunt venientes ex N, concurrent in D. Igitur punctum N cernetur ab oculo D per punctum B; punctum autem E, cujus radius EA irrefractus permanet, videtur per A; punctum autem B est ad eamdem partem axis cum puncto N, ad quod refertur; ergo objectum erectum videtur; quod erat primum.

Porro BA est spatium, quod in linea BA occupat objectum EN per refractionem visum. At ducta ND, quæ planum secat in C, CA est spatium, quod occupat objectum, refractione sublata; igitur ratio BA ad CA definit rationem magnitudinis apparentis ad veram. Est autem BA major CA, quia D cadit intra A, & P; ergo magnitudo apparens erit major vera secundum diametrum, quod erat secundum.

Et quia est PE, PA::EN, AB, erit AB × PE rectangulum æquale rectangulo PA × EN; & quoniam est etiam DE, DA::EN, AC, erit AC × DE æquale DA × EN; ergo AB erit ad AC in composita directa ratione PA ad DA, DA, & reciproca PE ad DE; hoc est AB, AC:: $\frac{PA}{PE}$, $\frac{DA}{DE}$; ergo & AB, AC:: PA × DE, DA × PE, siquidem objectum sit propinquum. At si longe objectum EN positum sit, lineæ DE, PE, ut æquales assumi possunt, quamobrem erit AB, AC:: PA, DA, quod erat tertium. Punctum P deinceps vocabimus punctum directionis.

Corollarium Primum.

Si medium densius AN non plana, sed sphærica superficie sit terminatum, cujus centrum Q, subtensa AB, quæ superficies convexitatem ad oculum obvertat, eadem erit constructio, & demonstratio, oculo inter superficiei ACB focum O, & superficiem ipsam constituto; neque aliud intereſt, nisi quod positus, seu distantia P puncti ab oculo alia est in secundo hoc casu, atque in primo, nimirum in illo punctum respondens P longius distat ab oculo. Sit enim, si fieri potest, propius, & sit in V, & ducatur VB. Est (per Propos. XIX) I, R:: BD, BP, & (per Propos. LXXXIII) I, R:: VQ × BD, VB × QD, hoc est BP × VQ æquale VB × QD, atque ideo BP, BV:: DQ, VQ; sed VQ major est quam DQ; ergo & BV major BP, ideoque punctum V remotius ab oculo.

Co-

Corollarium Secundum.

Videbitur itaque majus objectum per superficiem hanc sphæricam, quam per planam, sive objectum sit vicinum, sive longinquum; nam etiam in hoc casu superficiei sphæricæ, cum objectum longinquum est, DE, PE ut æquales assumi possunt. Sive autem sit vicinum, sive longinquum, quoties AP sit major, sit major etiam AB, ideoque magnitudo objecti apparens redditur major supra veram per superficiem sphæricam, quam per planam.

PROPOSITIO IC.

THEOREMA.

Si in eodem, vel æquali medio, in quo est oculus D (Fig. 226) *sit objectum* MN, *quod trans medium densius* RB *parallelis planis ad axem* ED *normalibus videatur, cernetur primo erectum; secundo auctum magnitudine; tertio & magnitudo apparens ad veram erit, ut distantia oculi ab objecto ad distantiam puncti directionis ab eodem objecto.*

Sit oculus in D, & P punctum directionis. Punctum igitur N videbitur in B per radium refractum DB, qui erit (per Propos. VI) parallelus ad NP; punctum vero E per irrefra-

Ee ctum

ctum radium AD; sed N, & B sunt ad eamdem axis partem; ergo objectum videtur erectum, quod erat primum.

Refractione sublata, ducta DCN recta, punctum N videtur in C; ergo objectum erit per refractionem auctum in ratione AB ad AC, quod erat secundum.

Producta DB in H, est DE, DA::EH, AB; & DE, DA::EN, AC; ergo AB, AC::EH, EN; sed EH, EN::ED, EP; igitur AB, AC::DE, PE, nempe magnitudo apparens ad veram, ut DE ad PE, quod erat tertium.

PROPOSITIO C.

THEOREMA.

In eodem, seu æquali medio, in quo est oculus D (Fig. 227) *sit objectum* EN, *cujus radii a lente* ACQ *plano-convexa densioris medii refracti dirigantur ad oculum, magnitudo objecti apparens, erit tum major, tum æqualis, tum minor vera; & objectum semper cernetur erectum.*

Sit P punctum respondens, quod erit supra D. Radius ultimo refractus DK producatur, qui concurrat cum producto PN, exemp. gr. in *n*. Planum jam est, si objectum sit infra *en* in angulo EPN, videri majus vero; nam per refractionem videtur in recta DK producta; refractione sublata, videtur per rectam ab oculo D ad N ductam intra B, & C; igitur & videtur erectum, & majus vero. Si objectum sit in *en*, magnitudo apparens erit æqualis veræ; si supra *en*, magnitudo apparens minor vera; semper tamen objectum videbitur erectum.

PROPOSITIO CI.

THEOREMA.

Sit oculus in D (Fig. 228) *puncto axis* DAP *inter lentem, & focum ejus, &* P *punctum directionis: videbitur objectum* EN *erectum, & majus in eadem proportione Propos.* XCIII.

Ducatur per terminum N recta NBP lenti occurrens in B, & jungatur DB, ac ducatur ND lentem secans in C. Per punctum igitur B lentis videbitur objecti terminus N, qui videretur in C, si nulla esset refractio; punctum vero E per A cernitur, quia EA radius irrefractus transmittitur; ergo objectum erectum videtur, cum puncta N, & B sint ad eamdem partem axis. Erit autem ratio apparentis magnitudinis ad veram ea, quæ est BA ad CA; & cum BA sit major CA, erit objectum EN auctum magnitudine.

Est autem EN, AB::PE, PA, & EN, AC:: DE, DE, DA; igitur AB, AC:: $\frac{PA}{PE}$, $\frac{DA}{DE}$, hoc est AB, AC::PA x DE, DA x PE, seu magnitudo apparens ad veram in ratione composita distantiæ puncti P a lente ad distantiam oculi a lente, & distantiæ oculi ab objecto ad distantiam puncti P ab eodem objecto; si quidem objectum sit proximum. Cum autem objectum longinquum est, lineæ PE, DE ut æquales assumi possunt; quamobrem erit AB, AC::PA, DA, nimirum magnitudo apparens ad veram, ut distantia puncti A a lente ad distantiam oculi ab eadem lente.

Corollarium Primum.

Ponatur oculus in foco O radiorum parallelorum (*Fig.* 229), & propinquum sit objectum EN, sitque NB parallela axi quæ lenti occurrat in B, & jungatur BO, itemque NCO. Quia NB axi est parallela, refringetur versus focum O; quamobrem punctum N spectabitur per solum radium OB; radius vero EA irrefractus transit; ergo erectum videbitur objectum. At apparens magnitudo ad veram, habet similiter eam rationem, quæ est AB, seu EN ad AC, nempe quæ est OE ad OA, & in hac ratione augetur, secundum diametrum, magnitudo apparens comparate ad veram. Quod si longinquum fuerit objectum, ratio EO ad AO erit ve-

veluti infinita, atque ideo prope infinita objecti ampliatio. Existente vero oculo in foco O, quantumcumque a lente removeatur objectum, semper eadem magnitudine videbitur; quia AB constanter eadem remanebit, AC vero minuetur.

Corollarium Secundum.

Si oculus fuerit infra focum O (*Fig.* 230, 231) erit punctum dirigens P ultra lentem; quapropter posito objecto intra punctum P, & lentem (*Fig.* 230) objectum & erectum, & majus videbitur in superius assignata ratione. Si vero fuerit objectum ultra punctum P (*Fig.* 231) videbitur inversum; radius enim DB post refractionem transit per P, & productus incidit in punctum N; ergo punctum N per refractionem videtur in B, & sublata refractione, videtur in C, atque ideo objectum inversum.

Corollarium Tertium.

In posteriori casu longinquum objectum apparebit majus, quando recta PA erit major DA; æquale cum æqualis; & minus cum minor. Objectum propinquum videbitur majus, minus, aut æquale, pro ut ratio PA x DE ad DA x PE erit majoris inæqualitatis, minoris, aut æqualitas ipsa.

Co-

Corollarium Quartum.

Quo magis igitur objectum in utroque casu accedet ad punctum P, eo major erit ratio magnitudinis apparentis ad veram, manentibus suo loco, & oculo, & lente, quia tum crescit ratio DE ad EP ita, ut posito objecto in P, ratio magnitudinis apparentis augeatur in infinitum.

PROPOSITIO CII.

THEOREMA.

Sit lens utrimque cava (Fig. 232) *videbitur objectum erectum; minus vero; & habebit magnitudo apparens ad veram rationem compositam ex rationibus distantiæ inter lentem, & punctum* P *dirigens ad distantiam oculi a lente, & distantiæ inter oculum & objectum ad distantiam inter objectum, & punctum* P. *Si vero longinquum sit objectum, magnitudo apparens erit ad veram, ut distantia inter lentem & punctum* P *dirigens ad distantiam inter lentem & oculum.*

Esto objectum EN, lens AC, focus O, oculus in D axis puncto, & P punctum dirigens. Ducta NP, quæ lentem secet in B, jungatur DB. Radius igitur NB ad P directus, videbitur per B ab oculo D, & punctum N in B, punctum autem E in A, cujus radius EA irrefractus transit; igitur objectum apparebit erectum, quod erat primum.

Et quia linea EN occupat in lente per refractionem spatium AB, quæ occuparet intervallum AC, si nulla esset refractio, & est spatium AB minus AC, apparebit objectum minus vero in ratione AB ad AC, quod erat secundum.

Quoniam vero EN, AC ponuntur ad axem normales, sunt inter se parallelæ, itaque erit DE, DA::EN, AC, & PE, PA::EN, AB; ergo AC ad AB in ratione composita directa DA ad PA, & reciproca DE ad PE; atque ideo AB, AC::PA x DE, DA x PE, hoc est magnitudo apparens ad veram in ratione composita directa ex rationibus distantiæ inter lentem, & punctum P ad distantiam inter lentem, & oculum, & distantiæ inter oculum & objectum ad distantiam inter objectum, & punctum P, si quidem objectum sit propinquum. Si vero objectum sit longinquum, lineæ DE, PE ut æquales assumi poterunt, eritque AB, AC::PA, DA, hoc magnitudo apparens ad veram, ut distantia puncti P a superficie ad distantiam oculi ab ipsa superficie.

Corollarium.

Manifestum est, manente oculo, & lente cava, quo magis removeatur ab ea objectum, eo ma-

magis imminui rationem apparentis magnitudinis ad veram, propterea quod DE, & PE magis ad æqualitatem accedunt. Manifestum quoque est, si oculus D sit lenti satis proximus, proximiora fieri puncta D, & P, ut rationes PA ad DA, & DE ad PE haberi possint perinde, atque rationes essent æqualitatis: quo in casu & propinqua, & longinqua objecta videntur eadem magnitudine, qua videntur lente remota.

PROPOSITIO CIII.

THEOREMA.

Objectum a speculo concavo circulari reflexum alias videtur inversum situ, alias erectum, alias apparenti magnitudine auctum, alias imminutum.

Esto speculum circulare concavum NBM, (*Fig.* 233) oculus D, objectum FG, & incidentis radii GN sit reflexus ad oculum ND, incidentis FM sit reflexus MD, & incidentium intersectio in axe sit H. Punctum G post reflexionem videbitur ab oculo per lineam DN, ut in g; punctum F per lineam DM, ut in f, itaque situ inverso; atque ideo inversum videtur objectum. Porro per reflexionem videtur sub angulo gDf, reflexione sublata, sub angulo FDG, atque ideo magnitudo apparens secundum diame-

metrum minor vera in ratione gf ad GF. Si objectum accedat propius ad punctum H, & ejus magnitudo consistat inter HF, HG, ut reflexi radii in oculum D incidant, decrescit ratio magnitudinis veræ ad apparentem, donec inter puncta intersectionum S, & P constituto objecto, magnitudo vera æqualis omnino est apparenti. Si vero sit ultra hæc puncta propius ad H, in eodem tamen angulo GHF, jam palam est, magnitudinem apparentem fieri majorem vera; at semper inversum apparebit objectum.

Sit objectum ultra H in angulo NHM, & a lineis HN, HM terminatum, ut IK. Punctum I videbitur per radium DN, hoc est ad eamdem axis partem cum I, & similiter K comparate ad M; igitur erectum cernetur objectum. Videbitur autem sub angulo IDK, sublata reflexione, minori quam NDM; ergo magnitudo apparens erit major vera.

Corollarium.

Hinc proclive est videre, si speculum sit convexum (*Fig.* 234) magnitudinem apparentem, quæ adminiculo reflexionis per radios DN, DM videtur, semper esse minorem vera, quæ cernitur per radios DF, DG, reflexione sublata. Positio vero objecti semper apparebit erecta.

me- L E-

LECTIO DECIMAQUINTA.

NOnnulla dicenda restant de Telescopiis, quorum theoria omnis ex traditis jam Propositionibus manat; quæ vero sint telescopia, dicere non est opus; nemo enim ferme est, qui id ignoret. Construuntur autem telescopia duabus, aut quatuor lentibus; quæ constant duabus, unam habent aut convexam utrimque, aut plano-convexam, alteram aut utrimque cavam, aut utrimque convexam. Quæ telescopia quatuor lentibus constant, omnes habent utrimque convexas. Lens illa, quæ objectum respicit, dicitur *objectiva*, quæ propior est oculo, *ocularis*. Hinc telescopiorum effectus, de quibus nobis breviter est differendum, ex lentium figuris, proprietatibus, & positu pendent. Et primo quidem sit (*Fig.* 235.) telescopium plano-convexa, aut utrimque convexa lente objectiva GO, & oculari D utrimque æqualiter cava, quæ sit minoris sphæræ segmentum, cujus centrum C. Quoniam objectum distans assumitur, incidentes in lentem GO radii veluti paralleli considerandi sunt; quapropter refracti coeunt in aliquo axis puncto, veluti in K (per Propos. XCII). Intra focum K, & objectivam lentem GO statuatur lens cava D ita, ut punctum dispersus radiorum

rum parallelorum a parte K venientium incidat in K, & erit DK æqualis semidiametro DC (per Propos. XCII. Assumptis duabus analogiis ejusdem Proposit. LXXXVII, I, R::KC×DZ, DK×CZ, & I, R::KZ×DY, DZ×KY, neglecta lentium crassitie; quoniam ex aere in vitrum est I, R::3, 2, erit prior analogia priori refractioni inserviens 3, 2::KC×DZ, DK×CZ, hoc est 2KC, 3KD::CZ, DZ, nimirum 4KD, 3KD::CZ, DZ, & dividendo 1, 3::CD (seu DK), DZ; igitur KZ dupla KD, & Z focus ex prima refractione. In posteriori analogia secundæ refractioni inserviens, erit I, R ::2, 3, loquimur enim de lentibus vitreis; quare substitutis his valoribus, & valoribus ipsarum KZ, & DZ per priorem analogiam habitis, erit 2, 3::2KD×DY, 3KD×KY, hoc est DY, KY::6KD, 6KD, æquales nempe radii DY, KY, quod fieri nequit, nisi sint paralleli. Igitur radii in oculum ingrediuntur paralleli, qui afficiendo oculo sano, aut presbitæ, & excitandæ visioni aptissimi sunt.

Præterea, cum emanationum vis decrescat in duplicata ratione distantiarum ab origine, objecti remoti pauciores radii pupillam oculi nudi ingrediuntur, quam ut valeant sensorium movere; refractorum vero per objectivam lentem multo plures colliguntur in lentis cavæ spatio æquali spatio pupillæ, qui omnes egressi paralleli in in pupillam intrant, quo fit, ut objectum clare & distincte videatur, quod vix, & confuse, aut omnino nullo modo videretur oculo nudo.

Porro ad Myopis usum lens ocularis D ad objectivam propius admoveri debet; cum enim is non satis clare remota nimis objecta videat, videat autem perfecte proxima, ut in Scholio primo post Propos. XCIII diximus, si lens D accedat ad objectivam, ultimo refracti radii retro producti (per Propos. XCII) secabunt axem ultra ocularem lentem, exemp. gr. in Y, quod erit punctum dispersus, ideoque divergentes egredientur radii ex lente D, & maxime apti ad recte afficiendum Myopis oculum.

Porro esto A focus lentis objectivæ (*Fig.* 236) radiorum eorum, qui a parte D incidant in lentem GO paralleli; inter radios omnes, qui ab extremo puncto dexteræ partis remoti objecti HM in lentem GO illabuntur, unus erit, exemp. gr. MAC, qui transibit per A; hic autem (per Propos. XCII) refringetur a lente GO parallelus ad axem AD in CE, a lente vero D ita, ut habeat punctum dispersus Z in centro lentis D, sitque LEZ. Omnes autem radii ab eodem extremo objecti puncto M procedentes post refractiones omnes incident (per modo demonstrata) in oculum post lentem D constitutum parallele ad LE; qui vero manant a puncto medio H, incident irrefracti; igitur punctum H medium videbitur in directione axis, extremum M in directione LEZ, hoc est ad eamdem axis partem, in qua re vera est, ideoque objectum cernetur erectum. Oculus vero si nudus esset in A, objecti semidiametrum videret sub angulo CAB, hoc est posito oculo in Q, quod idem est, quia objectum valde remotum ponimus, ducta NZ ad AC parallela, sub angulo NZD, videlicet semidiameter vera nudo oculo ad apparentem post refractiones erit, ut IN ad IE. Ducta ergo EK ad AC, atque ideo ad ZN parallela, quia est & CE parallela ad AK, & æqualis, & similiter æqualis BI; erunt æquales BI, AK, & addita communi BK, æquales AB, IK; erit ergo IN, IE::ZI, AB. Igitur semidiameter objecti nudo oculo visa ad visam per telescopium, ut distantia ZI puncti dispersus ab oculari lente ad distantiam AB foci lentis objectivæ. Ex amplificatione objecti & claritate oritur judicium de illius minori distantia ab oculo, quam re vera sit. Ex sola figuræ inspectione videris jam a magnitudine pupillæ oculi pendere amplitudinem anguli visorii. Si pupillæ semidiameter sit non major, quam IE, extremum *m* objecti HM*m*, cujus incidens radius esset ab axe remotior, quam AC, refractum radium haberet pariter ab axe remotiorem, quam CE; ideoque in pupillam non ingrederetur. Hujusmodi igitur telescopio area, seu rerum visibiſibilium orbis major, aut minor eſt, quo major aut minor eſt pupillæ amplitudo; idque ſi placet, experiri licet; clauſo enim ad breve tempus oculo, ut pupilla dilatetur, quod & in tenebris accidit, deinde ſtatim ad teleſcopium admoto, latiori orbe, & plura videntur objecta, qui orbis paulo poſt contrahitur, contracta propter vim lucis pupilla. Et quia quo magis a lente D recedit oculus, eo minus remotiores radii EL, quod divergentes ſunt, pupillam ingrediuntur, ideo quo propius ad lentem accedit oculus, eo major fiet area, & eadem manet objecti amplificatio. Hinc ſequitur, ut quo major eſt angulus EZI, ſeu objecti amplificatio, eo minorem objecti partem videat oculus, quoniam nulla parte major fit pupilla: quamobrem & minor videbitur area rerum viſibilium; quo factum eſt, ut de alio teleſcopio cogitarent Optici.

In lente objectiva plana ad objectum, ad oculum convexa, focus eſt ad diſtantiam diametri; in lente oculari plana ad objectum, concava ad oculum, punctum diſperſus eſt ad diſtantiam diametri (per Propoſ. XCII); igitur in hoc caſu apparens objecti magnitudo, ſecundum diametrum, eſt ad magnitudinem veram, ut diameter lentis objectivæ ad diametrum ocularis. Sunt vero in eadem inter ſe ratione diametri, & ſemidiametri; quamobrem in eadem ratione augetur magnitudo apparens in hoc ſecundo caſu, atque in

in primo. Si lens objectiva ſit plana ad objectum, convexa ad oculum, & ocularis utrimque concava, in qua punctum diſperſus eſt ad diſtantiam ſemidiametri, objecti magnitudo creſcit in ratione diametri lentis objectivæ ad ſemidiametrum ocularis, quo teleſcopio magis augetur. Si lens objectiva ſit utrimque convexa, ocularis vero plana ad objectum, concava ad oculum, creſcit objecti magnitudo in ratione ſemidiametri convexitatis ad diametrum concavitatis. Igitur quo fuerit major diameter lentis objectivæ, & minor ocularis, eo erit major objecti amplificatio. Verumtamen amplificatio objecti per ocularem lentem minimæ diametri comparata officit claritati, quia quo minor eſt diameter, eo magis lens diſpergit radios, eoque pauciores oculum a quolibet objecti puncto ingrediuntur: limites docet experientia.

Eſto nunc teleſcopium duabus convexis lentibus conſtitutum (*Fig.* 257), quarum CM objectiva ſit majoris ſphæræ ſegmentum, quam ocularis D, & ita collocentur, ut in eodem puncto axis HOG ſit focus O lentis CAM radiorum parallelorum a parte H venientium, & focus lentis D radiorum parallelorum venientium a parte, in qua eſt oculus G. Radii itaque ad HA paralleli poſt primæ lentis CM refractionem coeunt in O, deinde poſt refractionem ſecundæ D iterum procedent paralleli ad axem AG. At ab alio puncto quovis dextri lateris, exemp. grat. obje-

objecti intelligantur radii in lentem objectivam incidere paralleli inter ſe, ad axem vero HG inclinati, cogentur & ipſi in punctum extra axem juxta O, ubi ſe ſe interſecantes, & ad lentem D delati, hinc paralleli inter ſe & ipſi pergunt ad oculum, quo habetur objecti diſtincta viſio.

Sumatur jam (*Fig.* 238) AQ æqualis AO, ex radiis, qui ab extremo dextri lateris objecti veniunt, aliqui erunt, ut RQ, qui per punctum Q tranſibunt, quique refringentur in SI paralleli ad AD, atque a lente D cogentur per IL, ſumpta DL æquali DO. Igitur punctum medium objecti per radium irrefractum videbitur in directione axis; extremum punctum in dextra ſitum poſt refractiones videbitur in directione LI, nimirum in oppoſita parte ejus, a qua venit radius puncti dextri R: quapropter inverſum apparebit objectum, hoc eſt dextra apparebunt ſiniſtra, & ima ſupra. Inſuper quia ſemidiameter objecti per refractiones videtur ſub angulo ILD, nudo autem oculo ſub angulo HQR, ſeu AQS, ſeu, quoniam objectum longinquum ponimus, ducta ID ad AL normali, & OP ad QS parallela, ſub angulo POD, erit magnitudo apparens objecti, ſecundum diametrum, ad veram, ut ID ad PD, hoc eſt ut diſtantia foci AO lentis objectivæ ad diſtantiam DO foci lentis ocularis. Nam juncta IO, & ducta IK ad SQ parallela, erit SQ æqualis IK. Igitur & QA æqua-

æqualis KD; ergo KD, ſeu QA, ſeu AO, DO::DI, DP.

Proclive autem eſt intelligere, poſito inter D, & L oculo, ſive propius ad D, ſive remotius, objectum eadem magnitudine apparere, quia ſub eodem angulo videtur; major tamen rerum viſibilium erit orbis, ſeu plures objecti partes videbuntur, quo propius ad punctum L accedat oculus.

Hujuſmodi teleſcopium vocatur Aſtronomicum, propterea quod hoc utuntur Aſtronomi in obſervationibus cæleſtibus; nihil enim intereſt utrum cæleſtia objecta erecta videantur, an inverſa.

Quoniam radiorum faſciculi, qui a quolibet rei viſibilis puncto manant, etſi radios poſt refractiones habeant quiſque ſuos parallelos, ipſi tamen faſciculi in oculum ingrediuntur in primo teleſcopio (*Fig.* 236) divergentes a puncto Z diſperſus, in ſecundo teleſcopio (*Fig.* 238) convergentes in focum L; hinc fit ut major area, ſeu, ut vocant, *campus* rerum viſibilium cernatur ſecundo teleſcopio quam primo.

Data enim in utroque eadem pupillæ apertura æquali EI, aut ID, radius MA refractus in EL (*Fig.* 236) non ingreditur oculum poſt lentem D poſitum, & eo minus, quo magis oculus a lente recedit, atque ideo non totum illud ſpatium videtur, quod angulo HAM reſpon-

det

det. At in secundo casu (*Fig.* 238) & radius RQ, & plures alii ab axe remotiores oculum afficiunt, quo non solum spatium angulo HQR angulo HAM (*Fig.* 236) æquali respondens videtur, sed multo etiam majus, idque magis, quo magis a lente D recedit oculus. Apparet itaque telescopium hoc, & jucundius esse ad visionis spectaculum, & commodius ad inveniendum in campo, seu area objectum, quod videre volumus.

Attamen ubivis post ocularem lentem collocato oculo, apparens objecti magnitudo eadem perseverat, ad quam nihil refert, quo loco oculus sit.

In hoc quoque telescopio ad Myopis usum lens ocularis erit ad objectivam propius admovenda.

Ad objecta autem terrestria commodius telescopium adinvenerunt quatuor lentibus convexis instructum, quod & res auget, & erectas exhibet, & aream ampliorem habet non minus, ac si duabus tantum constaret. Caret ergo non minimo incommodo, cum inversa objecta dignoscere sit difficile, nec sine molestia. Lentes ita sunt dispositæ; prima est objectiva A, cujus axis AG (*Fig.* 239) in quo sunt reliquæ tres C, D, E oculares inter se æquales; secunda C ita locata, ut hujus focus cum foco objectivæ conveniat in B; ad distantiam CD duplam ipsius BC, est tertia D; & tamdem sumpta DE æquali DC, est

est ultima E, & oculus in G, ut sit EG æqualis EH, seu CB. Radii a remoto objecto in objectivam lentem A incidentes paralleli coguntur in focum B, a quo egressi iterum a lente C, per sæpius memorata theoremata, ad lentem D paralleli transmittuntur, hinc autem convergentes ad communem duarum lentium D, & E focum H, ex quo denique in lentem E incidentes, & ab ea refracti in oculum G incidunt paralleli, quo visio distincta efficitur. Videbitur autem erectum objectum, & ratio amplificationis erit, ut distantia AB foci lentis objectivæ ad BC distantiam foci unius ex ocularibus.

Sit enim (*Fig.* 240) AI æqualis AB. Extremus radiorum ab objecto venientium fasciculus per I transiens, ut VI, a lente A in OH refractus ad axem parallelus, tandem post refractiones omnes ad oculum G defertur in directione NG, & per hanc videtur punctum V, nimirum in ea parte, in qua est; punctum vero medium X irrefractum in ipso remanet axe; ergo erectum conspicitur objectum. Præterea objecti semidiameter apparet sub angulo EGN, seu æquali CSL, oculo vero nudo videtur sub angulo XIV ex puncto I, ideoque propter objecti distantiam, ex puncto G; ergo apparens objecti magnitudo ad veram erit, ut angulus EGN ad angulum OIA. Ostendetur autem eodem modo, quo factum est supra, angulum

Gg 2 EGN

EGN esse ad angulum AIO, vel AID, ut IA, seu AB ad BC; ergo ec.

Area porro, seu campus rerum visibilium idem erit, atque in telescopio duarum lentium; continetur enim in angulo TIV, qui in telescopio illo cernitur in angulo ILS, in hoc vero in angulo MGN æquali.

Eadem, quæ diximus, tum in hoc, tum in altero telescopio præstari possunt, loco objectivæ lentis utrimque convexæ plano-convexa substituta, cujus tamen major erit foci distantia.

Cum Telescopiis maximam affinitatem habent Microscopia, quibus corpuscula, partesque eorum minimæ similiter auctæ magnitudine videntur, ut remota objecta telescopiis. Parantur microscopia alia unica lenticula, aut minima sphærula; & dicuntur simplicia; alia pluribus lentibus certa quadam ratione conjunctis, & dicuntur composita. Sit parva lens N (*Fig.* 241) utrimque æqualiter convexa, cujus focus R radiorum parallelorum a parte D incidentium, oculus D lenti proximus, & in foco R objectum QRQ; videbitur distinctum, erectum, & auctum magnitudine secundum diametrum; erit autem magnitudo vera ad apparentem, ut distantia RN foci a lente ad eam distantiam, in qua distincte videntur objecta nudo oculo.

A quolibet objecti puncto R manantes radii, refracti a lente N, egrediuntur paralleli inter se, quia objectum est in foco lentis; similiter a quolibet alio puncto Q manantes refracti egrediuntur omnes quidem ad axem inclinati, sed inter se paralleli, qui ita in oculum incidentes visionem omnino distinctam efficiunt. Præterea quia (per Propos. XCVI) radiorum puncti Q unus aliquis est, exemp. gr. QN, cujus refractus incidenti parallelus incedit, perinde atque ei in directum esset, considerare hunc possumus, neglecta minima lenticulæ crassitie, cui cum reliqui sint paralleli, quod de altero puncto Q similiter intelligatur, eodem modo afficitur oculus, ac si nulla esset refractio. Sed nudo oculo objectum videtur erectum; ergo, & lente interposita, erectum apparebit.

Igitur objectum QRQ sub eodem angulo QNQ videtur lente interposita, sub quo videretur oculo nudo; attamen per lentem videtur distinctum, quod nudo oculo videretur in eadem distantia admodum confusum; quamobrem perinde est, ac si ad eam distantiam NH videatur, in qua æque distinctum appareret oculo nudo. Ergo diameter vera QRQ ad apparentem erit, ut QQ ad PG, hoc est ut NR ad NH, nimirum ut distantia foci lentis ad eam, in qua distincte videretur objectum oculo nudo.

Sit octo pollicum distantia, in qua nudo oculo distincta, ut plurimum, fit visio; foci vero lenticulæ distantia quintam pollicis partem adæquet,

quet, erit apparens objecti augmentum ut 1 ad 40, secundum diametrum. Igitur quo minor erit foci distantia, & major erit minutæ rei visæ species. Quamobrem magis objectum amplificant ea microscopia, quorum lentes sunt minoris sphæræ segmenta, minus, quæ sunt majoris, multo vero minus si lentes fuerint plano-convexæ; nam in his focus est ad distantiam diametri, in illis ad distantiam semidiametri (per Propos. XCII), ita ut si tum in plano-convexa lente, tum in utrimque convexa fuerit eadem diameter, erit augmentum secundæ duplum augmenti primæ.

Datis duabus lenticulis, quarum una sit inæqualiter convexa, altera æqualiter convexa, & cujus semidiameter sit æqualis semidiametro majori prioris lenticulæ, erit distantia foci in prima (per Propos. XCII) quarta proportionalis post summam semidiametrorum, semidiametrum majorem, & duplam semidiametrum minorem; distantia foci in secunda erit ipsa semidiameter major; ergo foci distantia lentis inæqualiter convexæ erit minor distantia foci æqualiter convexæ, & augmentum majus per primam, quam per secundam. Contra vero res se habet, si lens æqualiter convexa semidiametrum habeat æqualem minori semidiametro lentis alterius.

Consulto autem lenti propius oculus applicatur, quia cum radii divergant a puncto N, quo ma-

magis oculus recedit a puncto N, & minorem objecti partem videre poterit.

Sit nunc sphærula C (*Fig.* 242) focus radiorum parallelorum a parte F procedentium post primam refractionem sit H, post utramque sit G, & F venientium a parte H. Collocatum sit objectum in foco F, oculus in foco G. Radii a puncto F egredientes post duplicem refractionem in oculum incidunt paralleli, quod cum de quolibet alio objecti puncto fiat, oculus distinctum videbit objectum.

Ducatur AL radius axi FC parallelus, qui refractus in LH per primam refractionem, & per secundam in DG, dabit (per Propos. XCII) CH duplam CI, & IG dimidiam; igitur GI, GH æquales inter se; assumi autem possunt, propter minimam differentiam, ut æquales inter se CF, CA, & GD, GI, seu GH; quapropter erit angulus DGI duplus anguli DHI. Est autem GH æqualis GI, æqualis FE, æqualis AL; ergo parallelæ LH, AG, & æquales anguli DHI, AGI; igitur angulus DGI duplus anguli AGI. Et quoniam CF, CA assumi possunt ut æquales, & est CF æqualis CG, erunt æquales etiam CA, CG, atque ideo angulus ACF duplus anguli AGF; ergo æqualis angulo DGI. Videtur igitur semidiameter FA objecti ab oculo in G, aut alibi in axe post sphæram po-

posito sub angulo DGI, seu ACF, quemadmodum videretur oculo nudo posito in C; ergo objectum erectum. Attamen oculus nudus in C objectum videret admodum confusum, videret autem distinctum ad distantiam, exemp. gr. CR octo pollicum, videt vero distinctum in G per lentem; ergo videt sub semidiametro OR; est ergo magnitudo vera ad apparentem, ut AF, OR, seu ut FC distantia foci a centro sphærulæ ad eam distantiam, in qua nudus oculus res videt distincte, nimirum ad distantiam octo fere pollicum. Amplificant ergo sphærulæ objectum in ratione trium partium ex quatuor diametri suæ ad longitudinem octo pollicum. Esto diameter EI sphæræ æqualis $\frac{1}{12}$, ut assolet, pollicis, erit CG $\frac{3}{48}$, cujus ad distantiam octo pollicum ea est proportio, quæ 1 ad 128, sane insignis. Et quoniam lenticula utrimque convexa objectum amplificat in ratione semidiametri ad octo pollices, si lenticula, & sphærula eamdem habuerint diametrum, magis illa, quam hæc, auget objectum.

Porro si distantia CG foci a centro sphæræ sit æqualis distantiæ NR (*Fig.* 241) foci a lente, objecti amplificatio erit eadem; verumtamen distantia NR objecti a lente erit tripla distantiæ IG (*Fig.* 242) a sphæra: quamobrem id commodi afferent lentes, quod latius spatium laterali luci relinquunt, qua objectum illustretur, in quo

quo uno sphærulis præstant lenticulæ.

In compositis Microscopiis hac ratione collocantur lentes. Sit lens A utrimque æqualiter convexa (*Fig.* 243) cujus focus radiorum a parte C venientium sit Q, & remotius a lente objectum in E, ut radii coeant per refractiones in aliquo axis puncto P, quod punctum dabunt duæ formulæ Prop. XCII, quibus naviter tractatis, inveniemus EQ, EA::EA, EP. Lens vero B (quæ sit majoris sphæræ segmentum quam A) ita collocetur, ut illius focus radiorum parallelorum incidat in P; sit lentium axis communis EC, & ponatur oculus ad partes C. Videbitur objectum distinctum, inversum tamen, & auctum magnitudine. Etenim radii ab objecti puncto E egressi coeunt, ut diximus, per refractiones in P, deinde a lente B redduntur, & incidunt in oculum paralleli, quod cum de quolibet alio objecti puncto dicendum sit, fit visio distincta.

Sit nunc (*Fig.* 244) FED objectum, & sint radii DAG, FAH, EAB per lentis medium transeuntes, quorum refracti AG, AH (per Propos. XCVI) incidentium sint paralleli. Hi a lente B coguntur in puncto aliquo axis C, quod punctum per formulas Propos. XCII dabitur, si fiat AP, AB::AB, AC. In C ergo ponatur oculus, qui in directione CG videbit objecti punctum D, atque ideo objectum inversum.

Sit

Sit L punctum ad distantiam LE octo pollicum ab objecto FED, in quo puncto oculus nudus objectum videret distincte. Erit ergo (quemadmodum in simplicibus microscopiis diximus) apparens semidiameter objecti ad veram, ut angulus BCH ad angulum ELF, seu ut horum angulorum, qui exigui sunt, sinus, nimirum in ratione composita sinus anguli BCH ad sinum anguli EAF, seu BAH, & sinus anguli EAF ad sinum anguli ELF. Porro sumpta AO æquali BC pro sinu toto, sinus anguli BCH est ad sinum anguli BAH, seu EAF, ut BH ad ON, ut AB ad AO, seu BC, & eodem modo sinus anguli EAF est ad sinum anguli ELF, ut EL ad EA; igitur apparens semidiameter erit ad veram in composita ratione AB ad BC, & EL longitudo octo pollicum ad EA; nimirum ut $AB \times EL$ ad $BC \times EA$, seu $AP \times EL$ ad $BP \times EA$.

Hæc habui, quæ vobis de Optica dicerem; si plura quæritis, & meliora, ab Auctoribus, qui de his agunt, censeo petatis.

FINIS.

ERRA-

ERRATA — CORRIGE

In Dedicatoria:

Pag.	lin.	Errata	Corrige
3	12	prepropera	præpropera
	22	auferunt	hauferunt

In Lectionibus.

Pag.	lin.	Errata	Corrige
15	3	normale	normalis
25	1	tectarum	rectarum
74	26	secat	secet
83	10	D*r*, *b*I	*dr* cum *b*G, *b*I
	14	LIX	XIX
90	2	refracti	reflexi
91	26	dupla ZO	dupla *z*O
92	1	ZO major	*z*O major
	3	spatio ZO	spatio *z*O
105	7	$\overline{PN}^2 \times \overline{NA}^2$	PN X NA
109	18	$\frac{AC \times yC}{yX}$	$\frac{AC \times yC}{yx}$
119	26	andem	tandem
123	20	; CK	; CH
129	25	L*c.c.*	L &c.
130	13	833370	833310
134	13	LVI	LXVI
137	26	concavam PX	concavam HGP, & unum incidenti in concavam PX
138	9	reflectentis	refringentis
145	13	$\frac{CR \times CN}{O}$	$\frac{CR \times CN}{o}$
152	18	supra punctum centrum	supra centrum
153	21	reflexi	refracti
154	22	I—R::	I—R, R::
155	11	PC X PY	PC X BY
158	17	), & permutando NH	) NH
	23	MK majorem	MH majorem
161	8	NA	MA
167	15	RC*n*	*r*C*n*
	17	CR	C*r*
170	25	I X NP	I X NF
176	24	per Corol. anteced.	per propos. anteced.
195	16	verumtamen seu	verumtamen id eveniet, seu
196	24	propos. LXXIX	propos. LXXIV
212	4	q. e. o.	q. e. absurdum
213	23	(Fig. 24)	(Fig. 224)
219	13	*Propos.* XCIII	*Propos.* XCVII
223	23	hoc magnitudo	hoc est magnitudo
227	4	proposit. LXXXVII	proposit. XCII

In Figuris.

Fig.		Errata	Corrige
35		PAK	BAK
123		GL	GLC

MONITUM.

Animadvertas velim Auctorem dixisse quidem pag. 5 angulum reflexionis illum esse, quem *comprehendunt radii incidens & reflexus:* verumtamen in Operis processu angulus reflexionis ei est interceptus a radio reflexo & a linea ad reflectentem superficiem perpendiculari.

Fig. 1

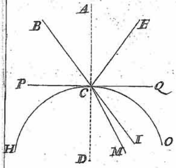


Fig. 2

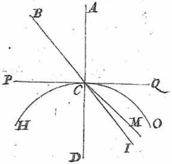


Fig. 3

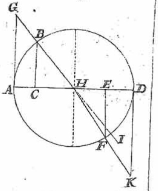


Fig. 4

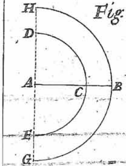


Fig. 5

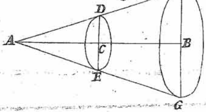


Fig. 6

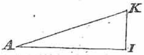


Fig. 7

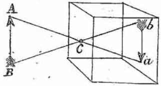


Fig. 8

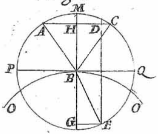
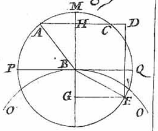
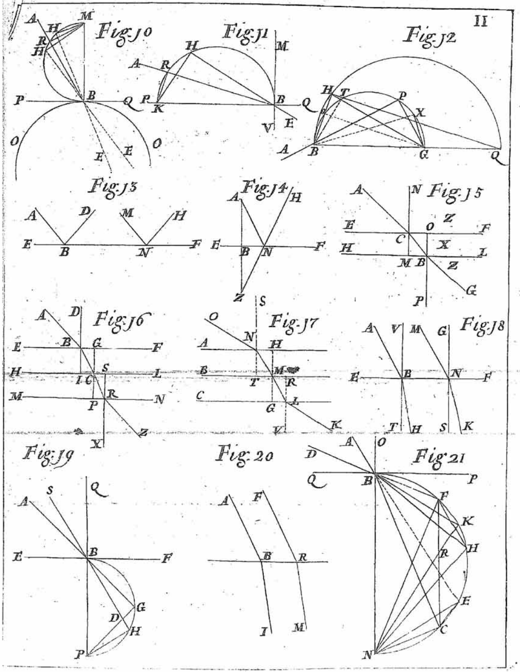


Fig. 9




II
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21

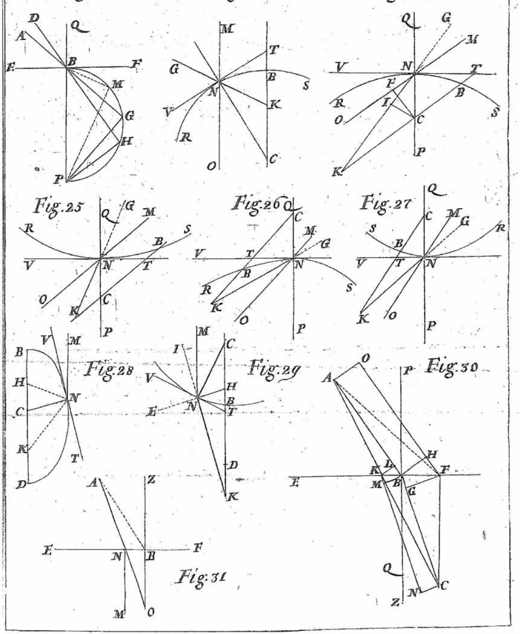
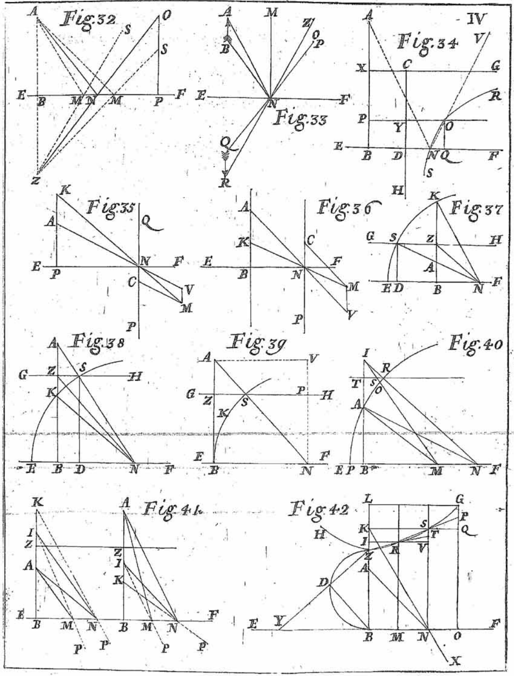
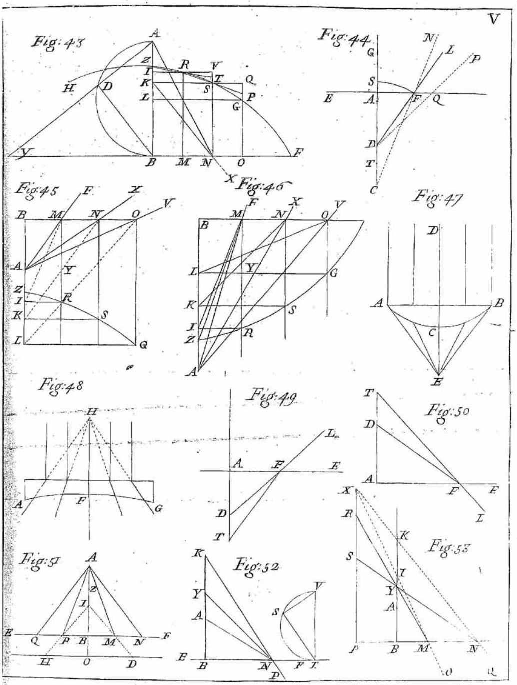
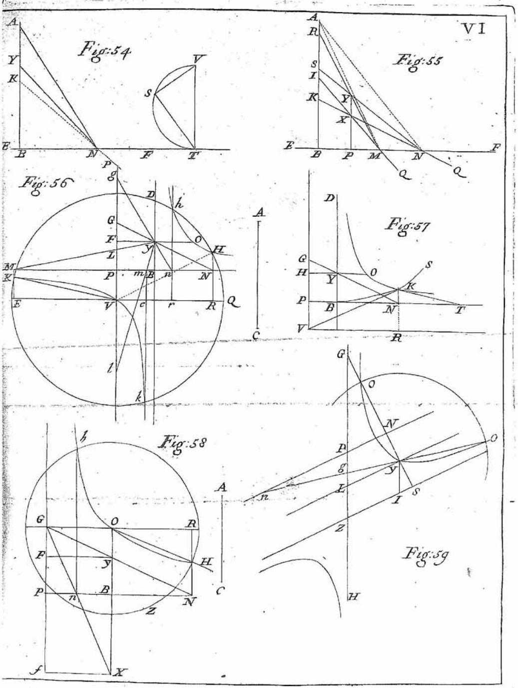


Fig. 22 Fig. 23 Fig. 24 Fig. 25 Fig. 26 Fig. 27 Fig. 28 Fig. 29 Fig. 30 Fig. 31


IV
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42


V
Fig: 43
Fig: 44
Fig: 45
Fig: 46
Fig: 47
Fig: 48
Fig: 49
Fig: 50
Fig: 51
Fig: 52
Fig: 53


VI
Fig:54
Fig:55
Fig:56
Fig:57
Fig:58
Fig:59

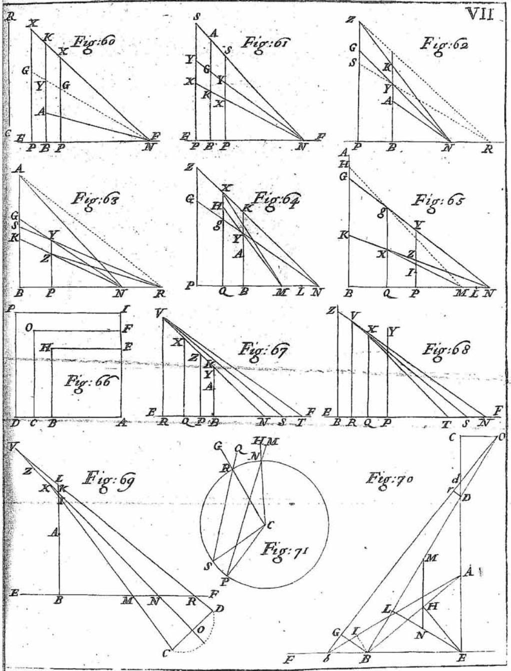
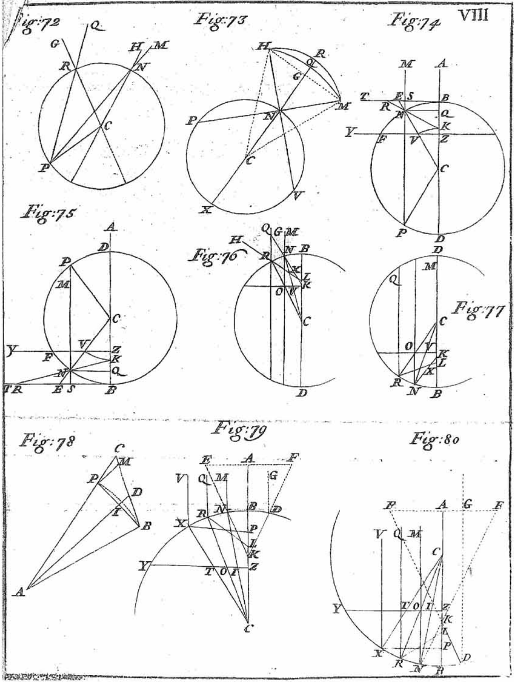


Fig: 60
Fig: 61
Fig: 62
Fig: 63
Fig: 64
Fig: 65
Fig: 66
Fig: 67
Fig: 68
Fig: 69
Fig: 70
Fig: 71


VIII
Fig:72
Fig:73
Fig:74
Fig:75
Fig:76
Fig:77
Fig:78
Fig:79
Fig:80

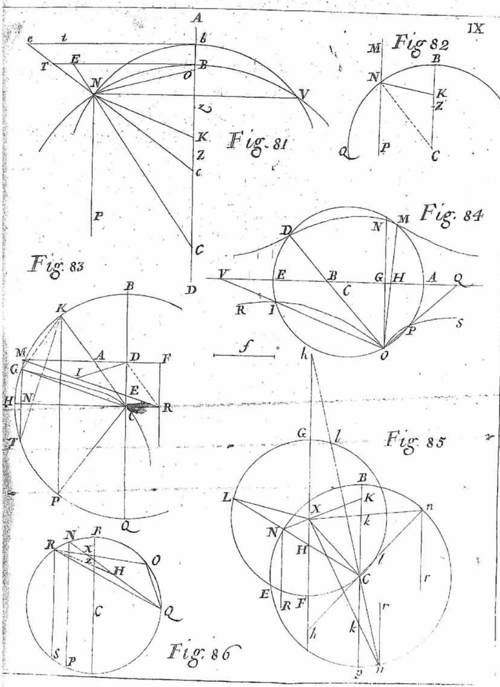


Fig. 81
Fig 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86

Fig. 87

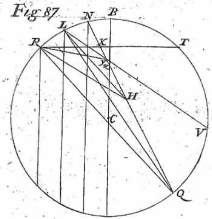


Fig. 88

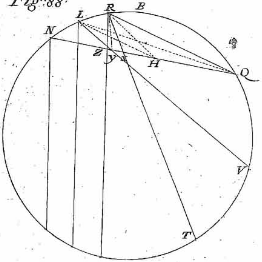


Fig. 89

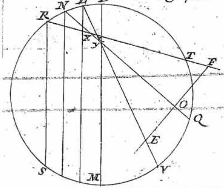


Fig. 90

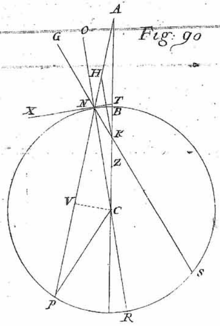
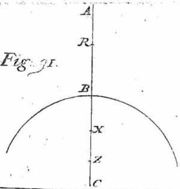


Fig. 91



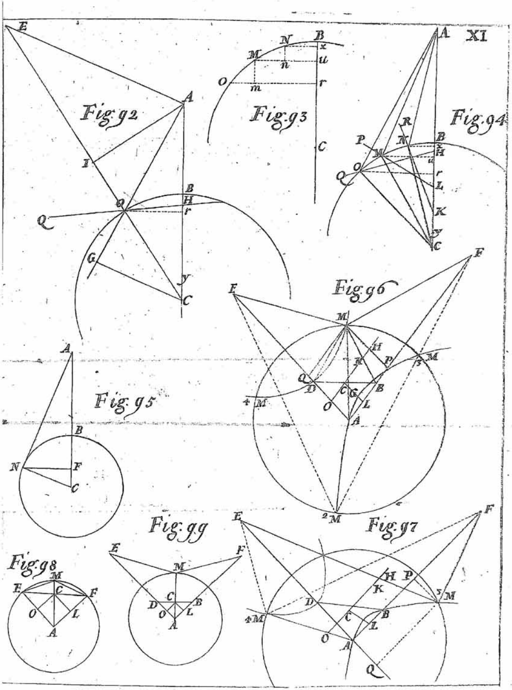


Fig. 92

Fig. 93

Fig. 94

Fig. 95

Fig. 96

Fig. 97

Fig. 98

Fig. 99

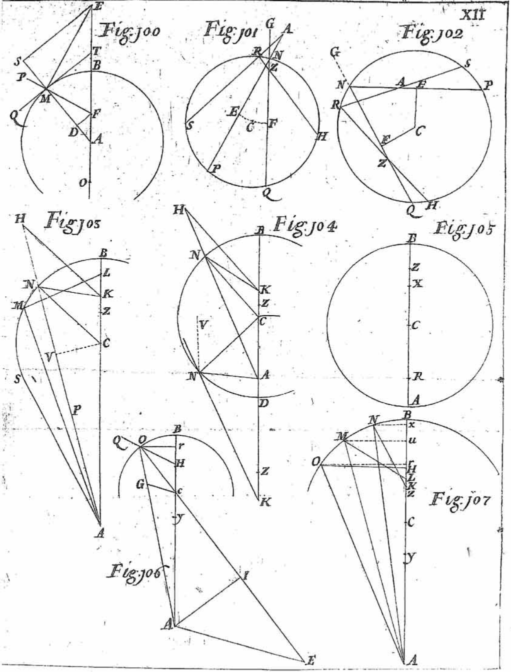


Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107

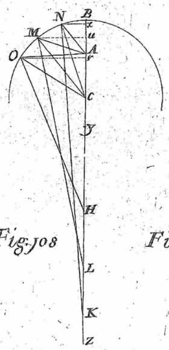


Fig. 108

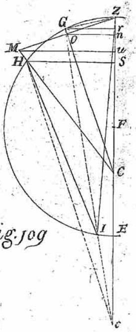


Fig. 109

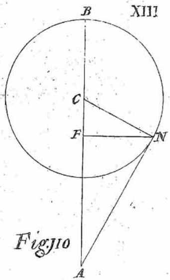


Fig. 110

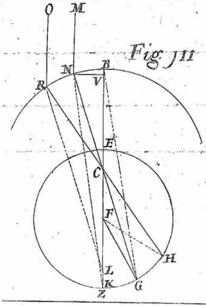


Fig. 111

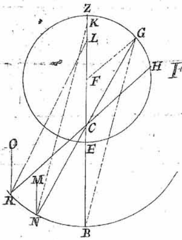
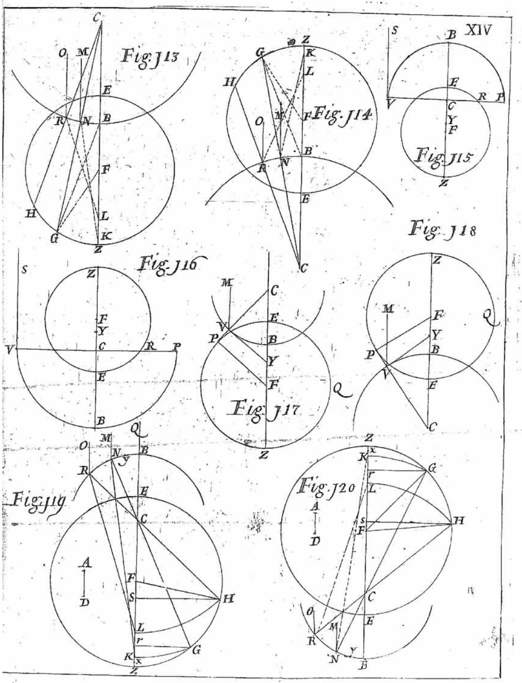


Fig. 112


XIV
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 116
Fig. 117
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 120

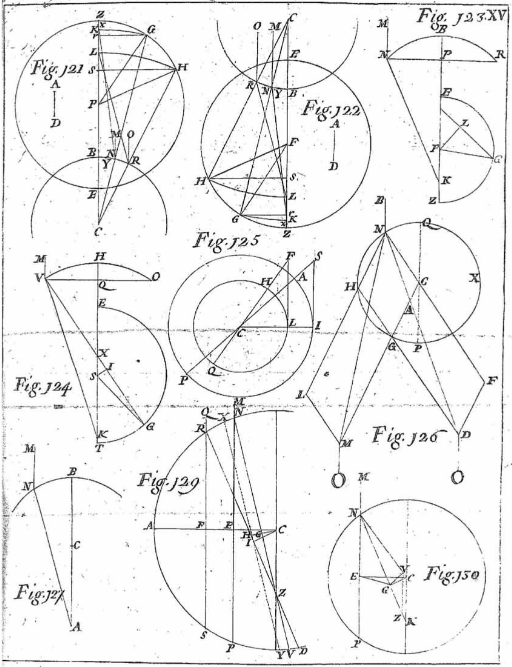


Fig. 123. XV
Fig. 121
Fig. 122
Fig. 125
Fig. 124
Fig. 126
Fig. 129
Fig. 127
Fig. 130

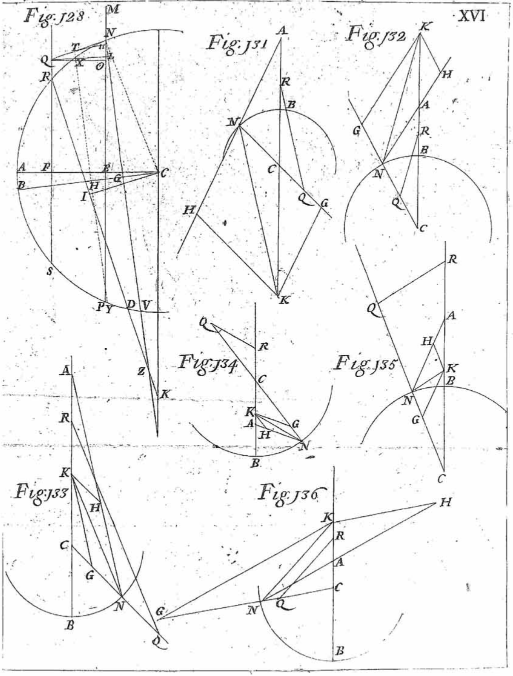


Fig. 128
Fig. 131
Fig. 132
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136

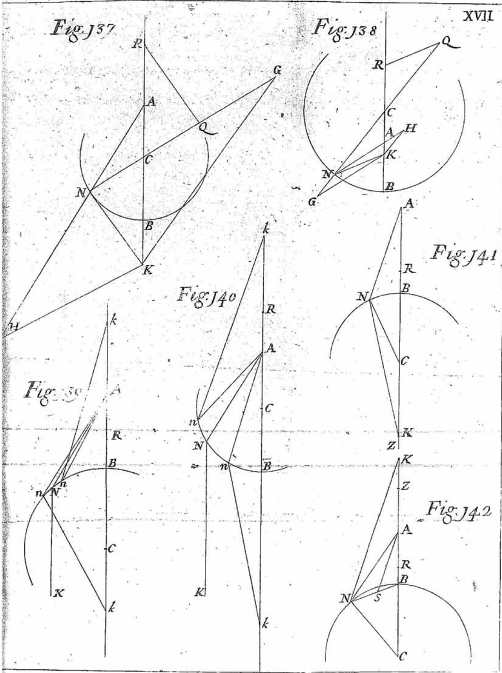


Fig. 137
Fig. 138
Fig. 140
Fig. 141
Fig. 142

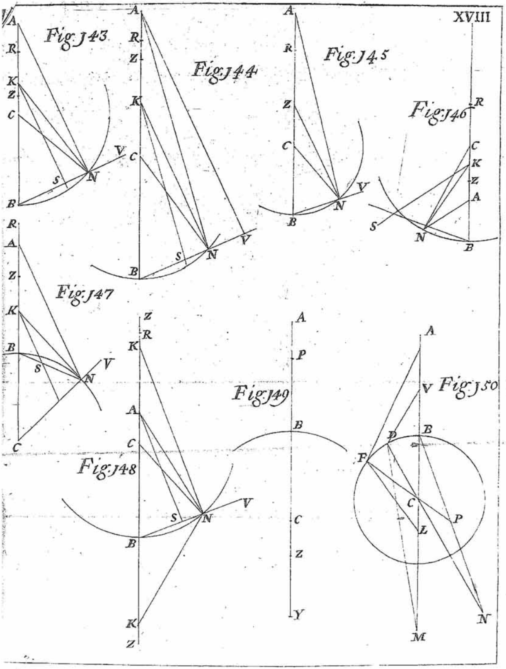


Fig. 143
Fig. 144
Fig. 145
Fig. 146
Fig. 147
Fig. 148
Fig. 149
Fig. 150

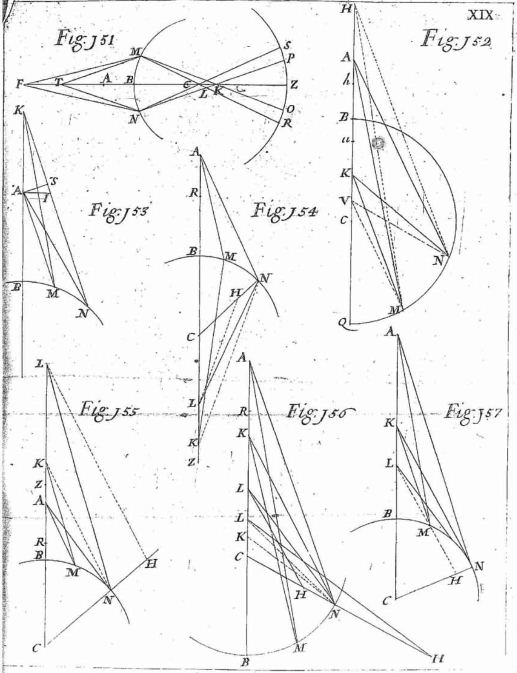
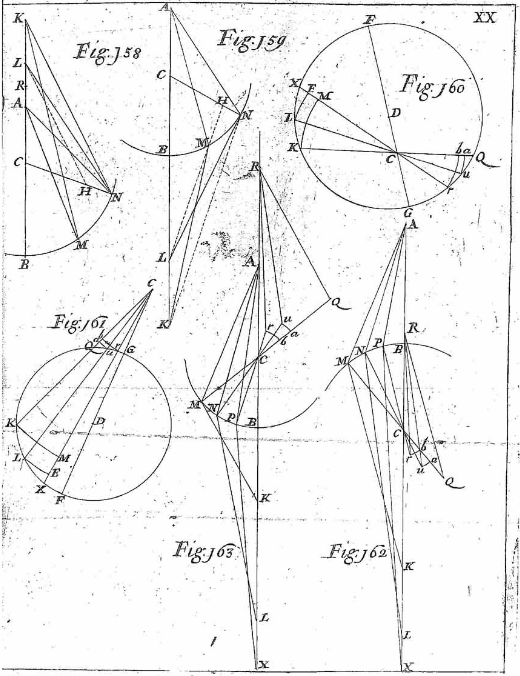
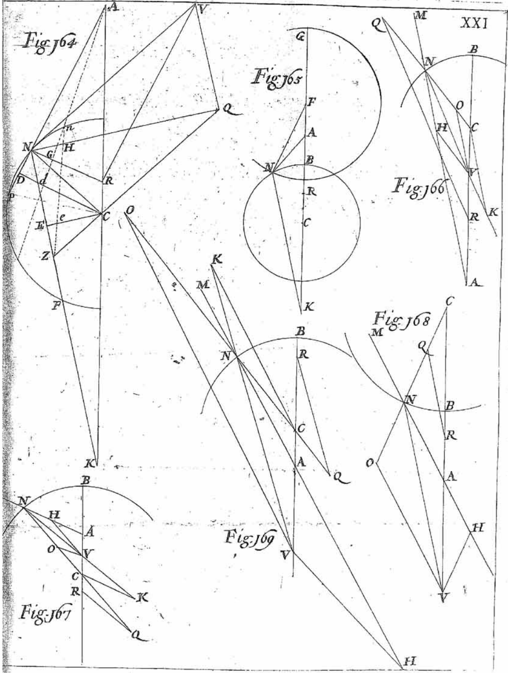


Fig. 151
Fig. 152
Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155
Fig. 156
Fig. 157


XX
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160
Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163

XXI



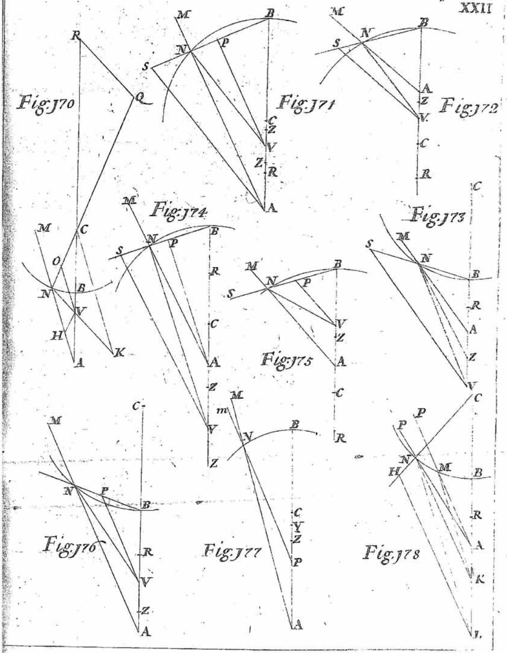
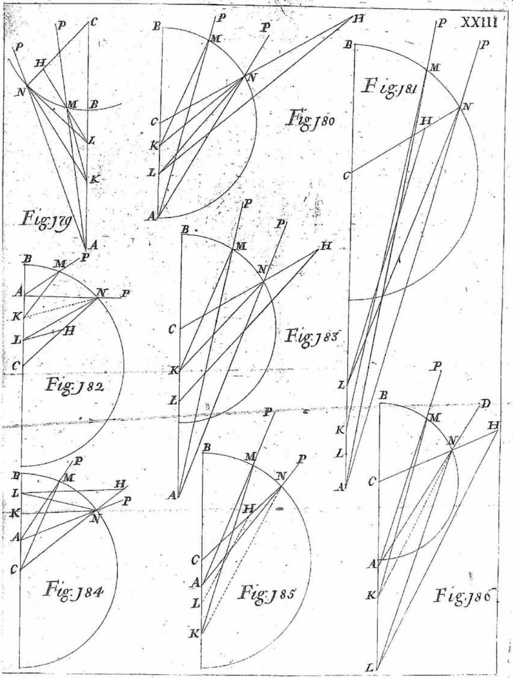


Fig. 170
Fig. 171
Fig. 172
Fig. 173
Fig. 174
Fig. 175
Fig. 176
Fig. 177
Fig. 178

XXIII



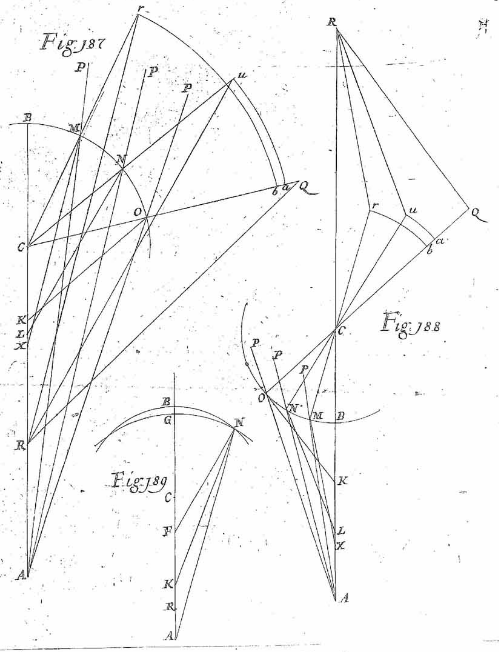


Fig. 187
r
P
P
P
u
B
M
N
b a Q
O
C
K
L
X
R
A
Fig. 188
R
r
u
Q
b a
C
P
P
P
O
N
M
B
K
L
X
A
Fig. 189
B
G
N
C
F
K
R
A

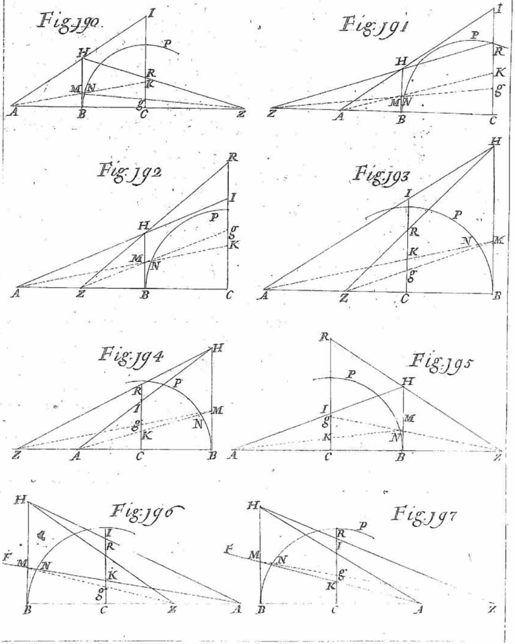


Fig. 190.
Fig. 191
Fig. 192
Fig. 193
Fig. 194
Fig. 195
Fig. 196
Fig. 197

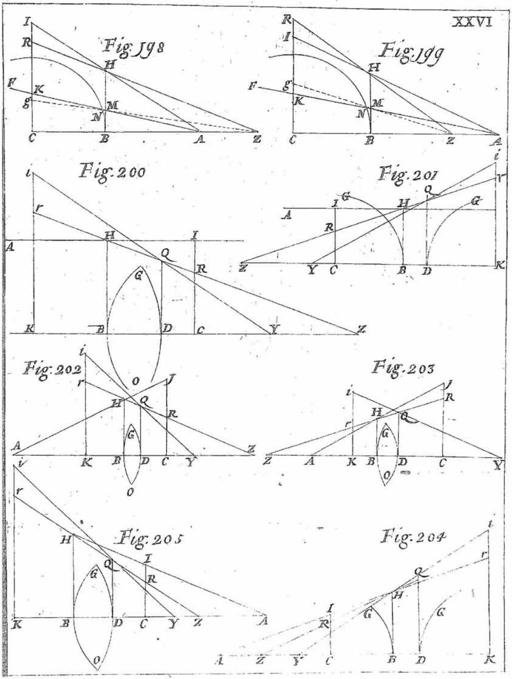
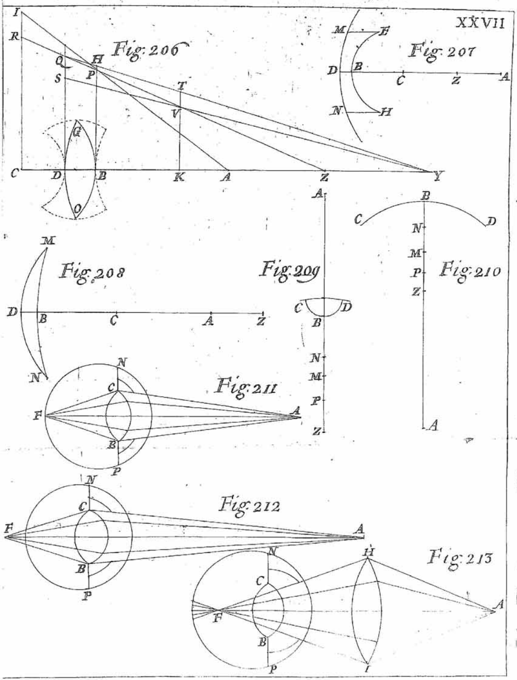
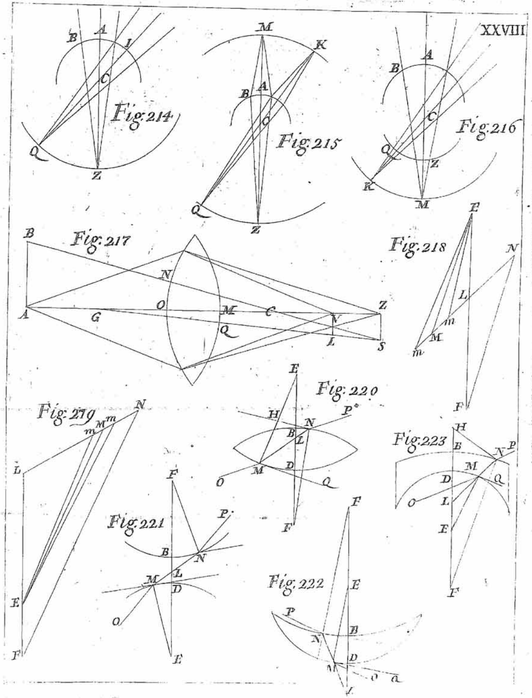


Fig. 198
Fig. 199
Fig. 200
Fig. 201
Fig. 202
Fig. 203
Fig. 205
Fig. 204

XXVII




XXVIII
Fig. 214
Fig. 215
Fig. 216
Fig. 217
Fig. 218
Fig. 219
Fig. 220
Fig. 221
Fig. 222
Fig. 223

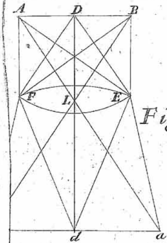


Fig. 224

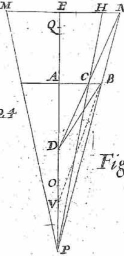


Fig. 225

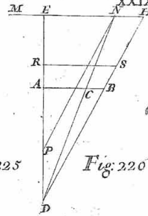


Fig. 220

Fig. 227

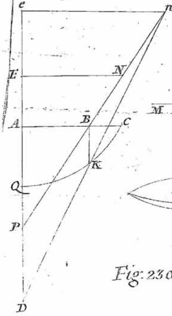


Fig. 228

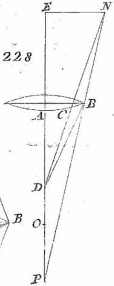
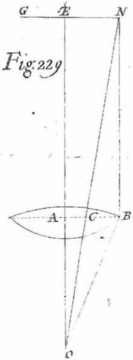


Fig. 229



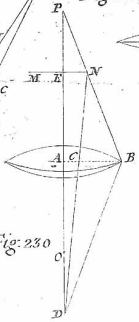


Fig. 230

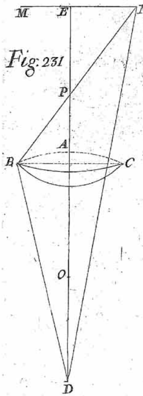


Fig: 231

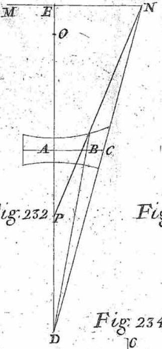


Fig: 232

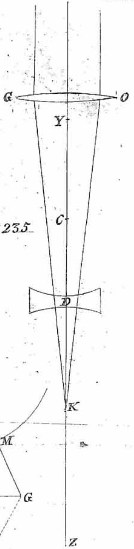


Fig: 235

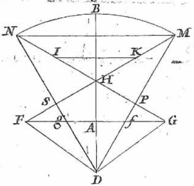


Fig: 233

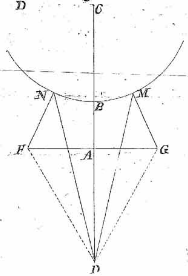


Fig: 234

XXXI

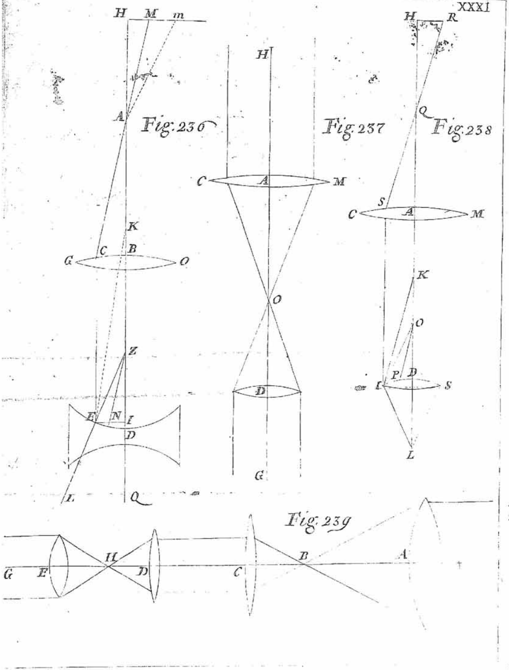


Fig. 236
H M m
A
K
C B
G O
Z
E N I
D
L Q
Fig. 237
H
C A M
O
D
G
Fig. 238
H R
Q
S
C A M
K
O
P D
I S
L
Fig. 239
G E H D C B A

Fig: 240

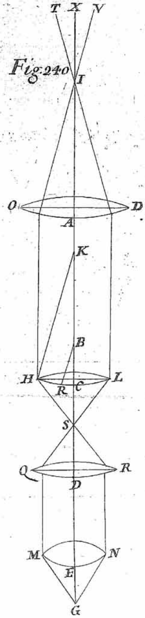


Fig: 241

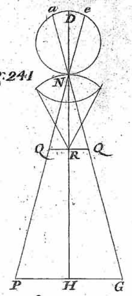


Fig: 242

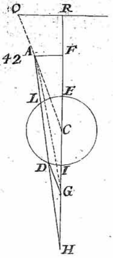


Fig: 243

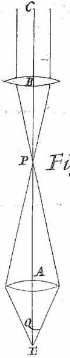


Fig: 244